Diferite concepte de convexitate şi aplicaţii

Alexandru Blaga

Cuprins

Introducere

Lucrarea de faţă îşi propune să trateze aspecte teoretice şi metodice ale noţiunilor de convexitate şi concavitate.

Tratarea acestor noţiuni este făcută atât prin mijloace elementare, cât şi prin tehnici de calcul diferenţial şi integral. Cele cinci capitole acoperă noţiunile de mărginire, continuitate, derivabilitate şi integrabilitate.

Primele patru capitole pregătesc bazele teoretice ale acestor noţiuni, care vor fi utilizate în capitolul al cincelea, rezervat aplicaţiilor. S-au pus în evidenţă diferitele concepte de convexitate şi condiţii minimale de echivalenţă a lor.

Aplicaţiile tratate sunt alese din toate ramurile analizei matematice la nivel liceal. Soluţiile acestora sunt formulate tot la nivel liceal. Multe dintre aplicaţii sunt probleme propuse elevilor la diferite etape ale Olimpiadei de Matematică în ultimii ani.

Capitolul 1

Preliminarii

Pentru prima dată un elev întâlneşte noţiunea de "convex" sau "concav" în geometrie la definirea poligoanelor convexe sau concave. Imaginea sa din punct de vedere geometric nu va coincide însă cu aceea pe care o va primi mai târziu, când va studia funcţiile convexe sau concave. Ca şi tehnică de lucru, a stabili dacă un poligon este convex, sunt folosite în principiu două rezultate, date de:

Proprietatea 1.1. Un poligon este convex dacă şi numai dacă orice diagonală a lui este situată în interiorul său.

Proprietatea 1.2. Un poligon este convex dacă şi numai dacă faţă de orice dreaptă suport a laturii poligonului, toate celelalte vârfuri sunt situate de aceeaşi parte a ei.

Nu suntem interesaţi de acest tip de convexitate, motiv pentru care nu demonstrăm aceste proprietăţi, acestea eventual se fac în clasa a IX-a. Vom studia convexitatea respectiv convexitatea pe $\mathbb{R}$, motiv pentru care vom defeni prioritar ce este o submulţime a lui $\mathbb{R}$, care este convexă prin:

Definiţia 1.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem că A este convexă dacă pentru orice $a, b \in A$ avem $[a, b] \subset A$.

Definiţia 1.2. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, avem $[a, b] = \{b\alpha + a(1-\alpha) \,|\, \alpha \in [0, 1]\}$ iar $(a, b) = \{b\alpha + (1-\alpha)a \,|\, \alpha \in (0, 1)\}$.

Observaţia 1.1. $A \subset \mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă A este interval. Mulţimile unipunctuale sunt convexe în $\mathbb{R}$.

Avem ca şi rezultat al Definiţiei 1.2, următorul rezultat:

Propoziţia 1.1. *O mulţime $C \subset \mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ şi pentru orice $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in C$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ cu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, avem $\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i \in C$.*

Demonstraţie. **Necesitatea**. pentru $n = 2$, avem chiar definiţia convexităţii. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru n şi să o demonstrăm pentru $n + 1$.

Fie deci $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ cu $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ şi $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n+1} \in C$.

i) Dacă $\alpha_{n+1} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ şi $\sum_{1}^{n+1} c_i \alpha_i = c_{n+1} \in C$.

ii) $\alpha_{n+1} \neq 1$, notând $c = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} c_k$, avem

$$\sum_{1}^{n+1} c_i \alpha_i = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n + \alpha_{n+1} c_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1}) c + \alpha_{n+1} c_{n+1} \in C,$$

deoarece $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} = 1$, şi deci $c \in C$.

Suficienţa. Este evidentă, se deduce din cazul $n = 2$.

Definiţia 1.3. Funcţia $f : A \to B$ este convexă, dacă pentru orice $a, b \in A$ şi pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, avem inegalitatea:

$$f(\alpha\, a + (1 - \alpha) b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b),$$

respectiv f este concavă dacă

$$f(\alpha\, a + (1 - \alpha) b) \geq \alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b).$$

Observaţia 1.2. Dacă f este convexă, atunci "$-f$" este concavă şi reciproc.

Observaţia 1.3. Este necesar ca $(\alpha a + (1 - \alpha) b$ să fie din A pentru $a, b \in A$, adică să fie convexă; şi din acest motiv cum $A \subseteq \mathbb{R}$, avem $A = I$. Vom studia funcţiile convexe cu valori reale, definite pe I unde I este interval din $\mathbb{R}$.

Observaţia 1.4. Dacă inegalitatea din condiţia de convexitate este strictă, atunci funcţia se numeşte strict convexă respectiv strict concavă. În acest sens avem un exemplu de funcţie care este convexă, dar nu strict convexă.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, deoarece pentru $a, b \in (0, \infty)$ $f(\alpha a + (1 - \alpha) b) = |(\alpha a + (1 - \alpha) b| = \alpha a + (1 - \alpha) b = \alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b)$.
Acest exemplu este interesant prin faptul că evident orice funcţie care este strict convexă este şi convexă, reciproc însă nu.

Vom da în continuare o interpretare geometrică a funcţiei convexe, respectiv concave, ceea ce de fapt rămâne în imaginea vizuală a elevului.

Propoziţia 1.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Pentru $a, b \in I$ notăm cu $x = (1-\alpha)a + \alpha b$, unde $\alpha \in [0,1]$. Avem f convexă dacă şi numai dacă:*

$$f((1-\alpha)a+\alpha b) \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha - f(b) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Demonstraţie. Pentru $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ ecuaţia dreptei AB este $y = g(x)$ unde

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

avem deci f convexă dacă şi numai dacă, pentru orice $a, b \in I$ în care $a < b$, graficul funcţiei restricţionată la $[a, b]$ este situat sub graficul segmentului AB sau pe AB.

Analog, f este concavă dacă şi numai dacă, pentru orice $a, b \in I$ cu $a < b$, graficul funcţiei restricţionată la $[a, b]$ este situat deasupra graficului segmentului AB sau pe AB.

Există funcţii care nu sunt nici convexe, nici concave, şi iată un exemplu:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Avem pentru $\left.\begin{array}{l} x_1 = +2 \\ x_2 = -2 \\ \alpha = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(0) = -1 \leq \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 0,$

iar pentru

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -9 \\ x_2 = 3 \\ \alpha = 1/3 \end{array}\right\} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(-3+2) = f(-1) = 1 \geq \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Verificarea se putea face din Propoziţia 1.2 şi din graficul funcţiei, dar am ales verificarea prin definiţie, pentru aplicarea corectă a acesteia.

Un rezultat analog cu cel din Propoziţia 1.1 este dat de

Propoziţia 1.3. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, atunci f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ şi orice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ cu $\sum_1^n \alpha_i = 1$ avem:*

$$f\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \quad \textit{(inegalitatea lui Jensen).}$$

Demonstraţie. Necesitatea. Se demonstrează prin inducţie după n. Pentru $n = 2$, evident din definiţia convexităţii.

Presupunând propoziţia adevărată pentru n, o vom dovedi pentru $n+1$. Fie deci $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ cu $\sum_1^{n+1} \alpha_i = 1$.

i) Dacă $\alpha_{n+1} = 1$, deducem $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ şi deci avem:

$$f\left(\sum_1^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f(\alpha_{n+1}) = \sum_1^{n+1} \alpha_i f(x_i).$$

ii) Pentru $\alpha_{n+1} \neq 1$, definim $c = \sum_1^n \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k$ şi avem

$$\begin{aligned} f\left(\sum_1^{n+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left(\sum_1^{n} \alpha_i x_i + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right) = f\left(c(1-\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right) \\ &\leq (1-\alpha_{n+1}) f\left(\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} C_k\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \in I, \end{aligned}$$

deoarece avem şi $\sum_1^n \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} = 1$ şi deci $c \in I$, iar apoi pentru $n = 2$ avem concluzia.

Exemplul cel mai simplu pentru care o funcţie este convexă este la cel al funcţiei de gradul întâi, însă aceasta este şi concavă, dar avem în clasa a IX-a un exemplu pentru strict convexitate, deci:

Propoziţia 1.4. *Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este convexă pentru $a > 0$ şi concavă pentru $a < 0$.*

Demonstraţie. Fie $a > 0$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\begin{aligned} & f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = a\left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right]^2 + b(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + c \leq \\ & \leq \alpha(ax_1^2 + bx_1 + c) + (1-\alpha)(ax_2^2 + bx_2 + c) \Leftrightarrow x_1^2(1-\alpha)\alpha + x_2^2(1-\alpha)\alpha - \\ & - 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha(1-\alpha)(x_1 - x_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Din această verificare, putem motiva faptul că graficul funcţiei de gradul doi este cel pe care îl prezentăm copiilor la clasă. verificarea pentru $a < 0$ se face analog. Pentru o funcţie trigonometrică însă, verificarea se poate face doar pentru $\alpha = 1/2$ şi avem:

Propoziţia 1.5. *Funcţia sinus verifică următoarele inegalităţi:*

i) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$; $\forall\, x, y \in [0, \pi]$;

ii) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$; $\forall\, x, y \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Demonstraţie.

i) $$2\sin\frac{x+y}{2}-\sin x-\sin y\geq 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x+y}{2}-\sin x+\sin\frac{x+y}{2}-\sin y\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{3x+y}{2}+2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{3y+x}{2}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{y-x}{2}\left[\cos\frac{3x+y}{2}-\cos\frac{3y+x}{2}\right]\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{y-x}{2}2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\geq 0 \Leftrightarrow 4\sin^2\frac{y-x}{2}\sin\frac{x+y}{2}\geq 0$$

care este evidentă, deoarece $\frac{x+y}{2}\in[0,\pi]$.

ii) Analog pentru $x,y\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Cele două exemple impun o delimitare între cele două tipuri de convexitate, deci

Definiţia 1.4. Funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ se zice convexă în sensul lui Jensen, dacă pentru orice $x,y\in I$ avem: $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$.

Este evident că orice funcţie convexă este convexă în sensul lui Jensen, reciproc însă nu, doar în anumite condiţii.

Avem o teoremă de caracterizare pentru funcţiile convexe de tip Jensen dată de:

Propoziţia 1.6. *O funcţie $f:I\to\mathbb{R}$ este convexă în sensul lui Jensen dacă şi numai dacă pentru orice $n\in\mathbb{N}$; $n\geq 2$ şi orice $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\in I$ avem:*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)).$$

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie, dar o variantă de inducţie, cunoscută ca formă, dar mai rar utilizată.

Vom demonstra mai întâi că $P(2^n)$ adevărată.

Pentru $n=2$, din definiţie, iar pentru $n=4$ avem:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_3}{4}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{4}\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right] \end{aligned}$$

şi din inducţie $f\left(\frac{\sum\limits_{1}^{2^n}x_i}{2^n}\right)\leq\frac{1}{2^n}\sum\limits_{1}^{2^n}f(x_i)$ şi acum se face pasul pentru un n oarecare.

Notăm a_k, astfel $a_k \stackrel{d}{=} \begin{cases} x_k, & k \leq n \\ \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, & k \in \{n+1, n+2, \dots, 2^n\} \end{cases}$ şi atunci avem:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + (2^n - n)\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}{2^n}\right) =$$

$$= f\left[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2^n - n}{n \cdot 2^n}\right)\right] = f\left[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\frac{1}{n}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^n}\sum_{1}^{2^n} f(a_i) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) + (2^n - n)f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} - \frac{2^n - n}{2^n}\right) f\left(\sum_{1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{2^n}\sum_{1}^{n} f(x_i) \Rightarrow \sum_{1}^{n} f\left(\frac{x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(x_i).$$

Pentru suficienţă, afirmaţia este imediată.

Pentru nivelul claselor liceale conceptul de convexitate de tip Jensen este mai uşor şi mai comod de utilizat, iar conceptul de convexitate pe caz aşa numit general este mai greoi. Cele două concepte sunt echivalente în clasa funcţiilor mărginite superior, aşa cum rezultă din:

Propoziţia 1.7. *O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ mărginită superior este convexă dacă şi numai dacă este convexă în sens Jensen.*

Demonstraţie. Deoarece orice funcţie convexă este şi convexă de tip Jensen, avem de arătat că dacă funcţia este mărginită superior şi convexă în sensul Jensen, atunci ea este convexă. Presupunem că funcţia nu este convexă, atunci există $a, b \in I$ şi $\alpha_0 \in (0,1)\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ cu

$$(*) \qquad f\left((1 - \alpha_0)a + \alpha_0 b\right) > (1 - \alpha_0)f(a) + \alpha_0 f(b).$$

Dacă considerăm funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{(t-a)f(b) - (t-b)f(a)}{b-a}$ pentru care $g(a) = f(a) + \dfrac{f(a)(a-b)}{b-a} = 0$ şi $g(b) = f(b) - f(b) = 0$.

Putem deci presupune $f(a) = f(b) = 0$, căci în caz contrar facem analiza pe funcţia g, care este mărginită superior, şi atunci se poate considera $f\left((1 - \alpha_0)a + \alpha_0 b\right) > 0$.

i) Dacă $\alpha_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci $\alpha_1 = 2\alpha_0 \in (0,1)$ şi notând cu t_0, t_1 numerele:

$$\left.\begin{array}{l} t_0 = (1-\alpha_0)a + \alpha_0 b \\ t_1 = (1-\alpha_1)a + \alpha_1 b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{t_1 + a}{2} = \left(\frac{1-2\alpha_0}{2} + \frac{1}{2}\right) a + \frac{2\alpha_0}{2} b =$$
$$= (1-\alpha_0)a + \alpha_0 b = t_0,$$

adică $f(t_0) = f\left(\frac{t_1 + a}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(t_1)$, adică $f(t_1) \geq 2f(t_0)$.

ii) Dacă $\alpha_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci notând $\alpha_1 = 2\alpha_0 - 1$ şi $t_1 = (1-\alpha_1)a + \alpha_1 b$, avem că

$$\frac{t_1 + b}{2} = \frac{1}{2}\{(1 - 2\alpha_0 + 1)a + [(2\alpha_0 - 1) + 1]b\} = (1-\alpha_0)a + \alpha_0 b = t_0$$

şi deci $f(t_0) = f\left(\frac{t_1 + b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(t_1) \Rightarrow f(t_1) \geq 2f(t_0)$.

În consecinţă, în ambele cazuri putem determina $\alpha_1 \in (0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ cu proprietatea $f((1-\alpha_1)a + \alpha_1 b) \geq 2f(t_0)$. Prin inducţie determinăm $\alpha_n \in (0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ cu $f((1-\alpha_n)a + \alpha_n b) \geq 2^n f(t_0)$, şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_0)2^n = +\infty$, rezultă că f este mărginită superior, contradicţie.

Observaţia 1.5. i) În baza acestei proprietăţi, deoarece funcţia sinus este mărginită superior şi convexă de tip Jensen pe intervale determinate, se poate spune că pe intervalele pe care este convexă sau concavă de acest tip este şi convexă sau concavă pe caz general.

ii) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este convexă dacă şi numai dacă este convexă de tip Jensen. Acest rezultat se obţine din faptul că dacă f este continuă, atunci restricţia sa pe fiecare interval compact $[a, b]$ este mărginită.

Capitolul 2

Monotonia şi continuitatea funcţiilor convexe

Nu întotdeauna putem asocia funcţiile convexe cu cele continue sau cu cele monotone. Noţiunea de funcţie continuă nu induce automat pe acea de funcţie convexă pe acel interval. În acest sens avem exemplul funcţiei $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Din analiza următorului exemplu rezultă că proprietatea de monotonie a unei funcţii, nu o implică pe cea de convexitate sau concavitate.

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Această funcţie nu este strict monotonă, dar este concavă, mai mult, deşi funcţia este concavă, ea nu este continuă pe $[0, 1]$, dar este continuă pe interiorul intervalului.

2.1 Monotonia şi convexitatea

Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ şi $a \in I$, şi $r_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$, $r_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$, atunci are loc

Propoziţia 2.1. *Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă (concavă) dacă şi numai dacă pentru orice $a \in I$ funcţia r_a este crescătoare (descrescătoare).*

Demonstraţie. Necesitatea. f - convexă implică funcţia r_a - crescătoare.

Fie $a \in I$, $t_1, t_2 \in I \backslash \{a\}$ cu $t_1 < t_2$.

i) $t_1 < t_2 < a$, $t_2 = (1-\alpha)a + \alpha T_1$, deci $\alpha = \dfrac{a-t_2}{a-t_1} \in (0,1)$ şi

$$\begin{aligned} f(T_2) \le (1-\alpha)f(a) + \alpha f(t_1) &\Rightarrow f(t_2) - f(a) \le \alpha(f(t_1) - f(a)) = \\ &= \frac{a-t_2}{a-t_1}(f(t_1) - f(a)) \Rightarrow \frac{f(t_2)-f(a)}{-t_2+a} \le \frac{f(t_1)-f(a)}{a-t_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(t_1)-f(a)}{t_1-a} \le \frac{f(t_2)-f(a)}{t_2-a} \Rightarrow r_a(t_1) \le r_a(t_2) \end{aligned}$$

ii) $t_1 < a < t_2 \Rightarrow a = (1-\alpha)t_2 + \alpha t_1$ cu $\alpha = \dfrac{t_2-a}{t_2-t_1} \in (0,1)$ şi din

$$\left.\begin{array}{l} f(a) \le (1-\alpha)f(t_2) + \alpha f(t_1) \\ f(a) = (1-\alpha)f(a) + \alpha f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le \frac{a-t_1}{t_2-t_1}(f(t_2) - f(t_1)) +$$

$$+ \frac{t_2-a}{t_2-t_1}(f(t_1) - f(a)) = (1-\alpha)(f(t_2) - f(a)) + \alpha(f(t_1) - f(a)),$$

de unde

$$(f(t_2)-f(a))(a-t_1)+(t_2-a)(f(t_1)-f(a)) \ge 0 \Rightarrow \frac{f(t_2)-f(a)}{t_2-a} \ge \frac{f(t_1)-f(a)}{t_1-a}$$

şi deci $r_a(t_2) \ge r_a(t_1)$.

iii) $a < t_1 < t_2$, $t_1 = (1-\alpha)a + \alpha t_2$; $\alpha = \dfrac{t_1-a}{t_2-a} \in (0,1)$.
Deci $f(t_1) \le (1-\alpha)f(a) + \alpha f(t_2)$ şi $f(a) = (1-\alpha)f(a) + \alpha f(a)$, de unde

$$\begin{aligned} f(t_1) - f(a) \le \alpha(f(t_2) - f(a)) &= \frac{t_1-a}{t_2-a}(f(t_2) - f(a)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{f(t_1)-f(a)}{t_1-a} \le \frac{f(t_2)-f(a)}{t_2-a} &\Rightarrow r_a(t_1) \le r_a(t_2). \end{aligned}$$

În toate cazurile se confirmă monotonia, de tip crescător.
Suficienţa. Fie $a, b \in I$ şi $\alpha \in (0,1)$ fixaţi. Notăm $t = (1-\alpha)a + \alpha b \in (a,b)$ şi deoarece r_t este crescătoare avem:

$$\begin{aligned} &\frac{f(a)-f(t)}{a-t} \le \frac{f(b)-f(t)}{b-t} \Rightarrow \frac{f(a)-f(t)}{\alpha(a-b)} \le \frac{f(b)-f(t)}{(1-\alpha)(b-a)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(a)-f(t)}{\alpha(a-b)} \le \frac{f(t)-f(b)}{(1-\alpha)(a-b)} \Rightarrow (1-\alpha)f(a) - (1-\alpha)f(t) \le \\ &\le \alpha f(t) - \alpha f(b) \Rightarrow f(t) \le (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b), \end{aligned}$$

adică f este convexă. Dacă funcţia este strict convexă atunci r_a este strict crescătoare.

Stabilim o altă conexiune între convexitate şi monotonie prin

Propoziţia 2.2. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă atunci*

i) f este monotonă pe I sau

ii) există $t_0 \in I$ astfel ca f să fie descrescătoare pe $(-\infty, t_0] \cap I$ şi crescătoare pe $[t_0, \infty) \cap I$.

Demonstraţie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ convexă care nu este monotonă căci în caz contrar are loc i). Deoarece f nu este crescătoare avem că există $t_1, t_2, t_3 \in I$ cu $t_1 < t_2 < t_3$ şi $f(t_1) > f(t_2)$ şi $f(t_2) < f(t_3)$ (sau o altă variantă de nemonotonie).

$f\big|_{[t_1,t_3]}$ este convexă şi continuă, există $t_0 \in [t_1, t_3]$ în care f îşi atinge marginea inferioară pe $[t_1, t_3]$. Vom arăta că t_0 este un punct de minim global, $f(t) \geq f(t_0)$; $\forall\, t \in I$.

i) Dacă $t < t_1 \Rightarrow t_{t_0}(t) \leq r_{t_0}(t_1) \Rightarrow \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq \dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \leq 0$, de unde $f(t) \geq f(t_0)$.

ii) Dacă $t > t_3$, atunci $r_{t_0}(t) \geq r_{t_0}(t_3)$, de unde avem

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{f(t_3) - f(t_0)}{t_3 - t_0} \geq 0 \Rightarrow f(t) \geq f(t_0).$$

Dacă $a < b < t_0 \Rightarrow r_a(b) \leq r_a(t_0) \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(t_0) - f(a)}{t_0 - a} \leq 0$ şi deci $f(b) \leq f(a)$, adică pe $I \cap (-\infty, t_0]$ este descrescătoare.

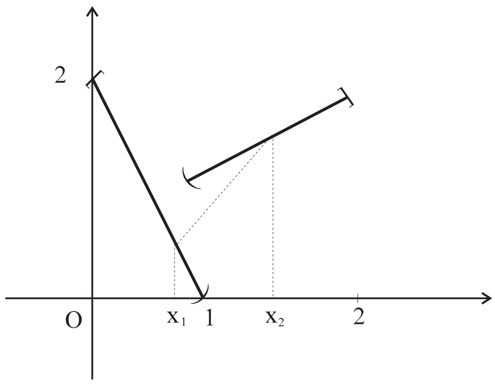
Dacă $t_0 < a < b$, $r_b(t_0) \leq r_b(a) \Rightarrow \dfrac{f(t_0) - f(b)}{t_0 - b} \leq \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$, şi cum $\dfrac{f(t_0) - f(b)}{t_0 - b} \leq 0 \Rightarrow f(a) \leq f(b)$, adică pe $[t_0, \infty)$ funcţia este crescătoare pe $I \cap [t_0, \infty)$.

Consecinţa 2.1. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă şi monotonă, atunci funcţia are un minim global.

Să analizăm următorul exemplu.

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in [, 12] \end{cases}$$

al cărui grafic este:

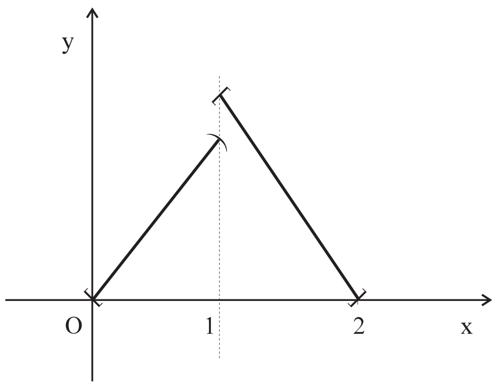


Deoarece pentru oricare două puncte $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ cu $a, b \in [0, 2]$; $a \neq b$, graficul funcţiei restricţionat la $[a, b]$ nu este situat sub coarda AB, dar nici deasupra coardei AB, funcţia nu este nici concavă, nici convexă. Pe de altă parte, nu este nici monotonă şi nu are punct de minim global, cu toate că pe $[0, 1]$ este descrescătoare iar pe $[1, 2]$ crescătoare. Punctul de minim ar putea fi $t_0 - 1$, nu sunt însă în condiţiile teoremei ....

Un alt exemplu analizat pe ideea acelei proprietăţi, dar pentru funcţii concave, este următorul

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ -3x + 6, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

al cărei grafic este:



Deoarece pentru oricare două puncte $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ cu $a, b \in [0, 2]$ graficul funcţiei restricţionată la $[a, b]$ nu este situat nici deasupra coardei AB şi nici sub coarda AB. Funcţia nu este nici concavă, nici convexă. Pe $[0, 1]$ f este crescătoare, iar pe $[1, 2]$ descrescătoare, punctul $t_0 = 1$ nu este punct de extrem.

Propoziţia 2.3. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este concavă, atunci*

i) f este monotonă pe I, sau

ii) există $t_0 \in I$, astfel ca f să fie crescătoare pe $(-\infty, t_0] \cap I$ şi descrescătoare pe $[t_0, \infty) \cap I$.

Demonstraţia este analogă, ca şi în Propoziţia 2.
Aceste proprietăţi susţin conexiunea dintre convexitate şi monotonie.

2.2 Continuitatea şi convexitatea

Deja am utilizat o anumită conexiune, dar nu am motivat-o în mod riguros. Acest lucru îl vom deduce la capitolul următor cu mijloace specifice derivabilităţii. În acest capitol vom deduce acest lucru din considerente care nu folosesc derivabilitatea. Avem

Proprietatea 2.1. *Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, convexă. Să se arate că funcţia este continuă în orice punct din interiorul lui I.*

Demonstraţie. Fie $x_0 < x_1 < x_2$ din interiorul intervalului I atunci, deoarece f este convexă, deducem

$$0 \leq f(x_1) - f(x_0) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_1 - x_0) \Rightarrow \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_1 > x_0}} f(x_1) = f(x_0).$$

Pentru $x_0 < x_1 < x_2$ din interiorul lui I avem:

$$0 \leq f(x_1) - f(x_0) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_1 - x_0) \leq \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_1}(x_1 - x_0)$$

şi deci $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_1 > x_0}} f(x_1) = f(x_0)$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.
Inegalităţile de mai sus se deduc din faptul că funcţiile definite prin r_a sunt monoton crescătoare.

Este esenţială condiţia din punctul $x_0 \in I$, punct interior, deoarece în caz contrar avem exemplul:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

care este convexă dar nu este continuă în $x_0 = 1$.

Legătura dintre funcţiile convexe şi mulţimile convexe nu neapărat pentru funcţiile continue, este dată de

Propoziţia 2.4. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Avem:*

i) f este convexă dacă şi numai dacă subgraficul său

$$G_f^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \in I \quad \text{şi} \quad y \geq f(x)\}$$

este convexă.

ii) f este concavă dacă şi numai dacă subgraficul său

$$G_f^- = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \in I : y \leq f(x)\}$$

este concavă.

Demonstraţie. Facem demonstraţia pentru i).
Necesitatea. Fie $a = (a_1, a_2) \in G_f^+$ şi $b = (b_1, b_2) \in G_f^+$ atunci $a_2 \geq f(a_1)$; $b_2 \geq f(b_1)$. Dacă notăm $c = (1-\alpha)a+\alpha b = ((1-\alpha)a_1 + \alpha b_1, (1-\alpha)a_2 + \alpha b_2)$. Din faptul că f este convexă avem: $f((1-\alpha)a_1+\alpha b_1) \leq (1-\alpha)f(a_1)+\alpha f(b_1) \leq (1-\alpha)a_2 + \alpha b_2 \Rightarrow c \in G_f^+$, adică aceasta este convexă.
Suficienţa. Fie $a, b \in I$ şi $\alpha \in [0, 1]$ şi deoarece G_f^+ este convexă şi $(a, f(a)); (b, f(b)) \in G_f^+$ rezultă că (F_f^+ convexă) $\Rightarrow ((1-\alpha)a + \alpha b, (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b) = (1-\alpha)(a, f(a)) + \alpha(b, f(b)) \in G_f^+ \Rightarrow f((1-\alpha)a + \alpha b) \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b)$, adică f este convexă.

Această propoziţie permite într-un fel identificarea funcţiilor convexe, prin faptul că subgraficul său este o mulţime convexă.

Capitolul 3

Funcţiile derivabile şi convexitatea

Proprietăţile de derivabilitate a funcţiilor convexe le punem în evidenţă prin mai multe rezultate.

Teorema 3.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ convexă şi $a = \inf I$, $b = \sup I$, atunci:*

i) f este derivabilă lateral pe (a, b) şi pentru orice $t_1, t_2 \in (a, b)$ cu $t_1 < t_2$, avem:

$$f'_s(t_1) \leq f'_d(t_1) \leq f'_s(t_2) \leq f'_d(t_2);$$

ii) dacă $a \in I$ (respectiv $b \in I$), atunci f are derivată la dreapta în a (respectiv la stânga în b) şi

$$f'_d(a) \leq f'_s(t); \text{ respectiv } f'_d(t) \leq f'_s(b), \text{ pentru orice } t \in I;$$

iii) există o mulţime cel mult numărabilă $A \subset I$ astfel încât f este derivabilă pe $I \backslash \{A\}$.

Demonstraţie. i) Fie $t \in (a, b)$ şi din r_t este crescătoare pe $I \backslash \{t\}$ rezultă că r_t are limite laterale finite în t, adică:

$$\lim_{\substack{x \to t \\ x < t}} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = l_2 \in \mathbb{R}$$

şi $l_1 \neq l_2$, adică f are derivate laterale în t (este posibil $l_1 = l_2$).
Fie $t_1, t_2 \in (a, b)$ cu $a < t_1 < t_2 < b$ şi u, v, w cu $a < u < t_1 < v < t_2 < w < b$.
Din monotonia lui r_t avem:

$$r_{t_1}(u) \leq r_{t_1}(v) = r_v(t_1) \leq r_v(t_2) = r_{t_2}(v) \leq r_{t_2}(w)$$

şi deci

$$\begin{aligned} f'_s(t_1) = r_{t_1}(t_1 - 0) \leq r_{t_1}(t_1 + 0) = f'_d(t_1) \leq r_{t_2}(t_2 - 0) = \\ = f'_s(t_2) \leq r_{t_2}(t_2 + 0) = f'_d(t_2). \end{aligned}$$

ii) Dacă $a \in I$ (respectiv $b \in I$), atunci facem acelaşi raţionament ca şi la i) pentru $a < t_1 < u$ (respectiv $t < t_2 < b$).

iii) Din i) rezultă că şi f'_s este crescătoare pe (a,b), adică pe o mulţime cel mult numărabilă A, f'_s este continuă pe $(a,b)\backslash A$.

Fie $t_0 \in (a,b)\backslash A$, atunci f'_s este continuă în t_0 şi pentru $t > t_0$ avem:

$$f'_s(t_0) \leq f'_d(t_0) \leq f'_s(t)$$

şi trecând la limită pentru $t \to t_0$ deducem $f'_s(t_0) = f'_d(t_0)$, adică f este derivabilă în t_0. Cum t_0 a fost arbitrar din $(a,b)\backslash A$, rezultă că f este derivabilă pe $I\backslash A$.

Proprietatea 3.1. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ convexă şi $a = \inf I$, $b = \sup I$ iar $t_0 \in (a,b)$. Avem: $f(t) \geq f(t_0) + m(t - t_0)$, $\forall\, t \in I$ şi oricare ar fi $m \in \big[f'_s(t_0), f'_d(t_0)\big]$.

Demonstraţie. Dacă $t > t_0$ atunci:

$$r_{t_0}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq \inf_{\substack{s \in I \\ s > t_0}} r_{t_s}(s) = f'_d(t_0) \geq m.$$

Analog pentru $t < t_0$ avem:

$$r_{t_0}(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq \sup_{\substack{s \in I \\ s < t_0}} r_{t_0}(s) = f'_s(t_0) \leq m,$$

adică ceea ce s-a cerut.

Se poate deduce din această propoziţie următorul rezultat:

Corolarul 3.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I, atunci f este convexă dacă şi numai dacă:*

$$f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0),\ \forall\, t, t_0 \in I.$$

Demonstraţie. Necesitatea se deduce din proprietatea precedentă, iar pentru **Suficienţa**. Presupunem că inegalitatea are loc, atunci pentru orice $a, b \in I$ şi orice $\alpha \in [0,1]$ avem că:

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f((1-\alpha)a + \alpha b) + f'((1-\alpha)a + \alpha b)(a-b)\alpha \\ f(b) &\geq f((1-\alpha)a + \alpha b) - f'((1-\alpha)a + \alpha b)(a-b)(1-\alpha), \end{aligned}$$

de unde deducem

$$(1-\alpha)f(a) + \alpha f(b) \geq f((1-\alpha)a + \alpha b)$$

şi deci f este convexă.

Observaţia 3.1. Din acest corolar putem deduce o altă interpretare geometrică pentru convexitatea funcţiilor derivabile. El implică faptul că o funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $t_0 \in I$, tangenta la graficul lui f în punctul $(t_0, f(t_0))$ se află sub graficul lui f. Dacă aplicăm acest rezultat pentru funcţia "$-f$", deducem că f este concavă dacă şi numai dacă pentru orice $t_0 \in I$, tangenta la graficul lui f în punctul $(t_0, f(t_0))$ se află deasupra graficului lui f.

În continuare vom analiza din punctul de vedere al convexităţii, proprietăţi caracteristice funcţiilor derivabile legate de teorema lui Fermat, funcţii crescătoare, puncte de inflexiune, legătura dintre funcţiile derivabile de două ori şi funcţiile convexe.

Teorema 3.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ convexă şi derivabilă, atunci pentru orice t_0 punct din interiorul lui I, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) t_0 - punct de minim global;
ii) t_0 - punct de extrem local;
iii) $f'(t_0) = 0$.

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii) se deduce din Proprietatea 3 (Capitolul 2) sau din definiţie.
ii) $\Rightarrow$ iii) rezultă din teorema lui Fermat.
iii) $\Rightarrow$ i) din rezultatul precedent.

Putem afirma că acest rezultat este mai general decât cel din teorema lui Fermat, deoarece aici avem condiţii necesare şi suficiente.

Am dedus că orice funcţie convexă pe I este continuă pe interiorul intervalului, avem însă un rezultat care exprimă mai mult decât atât.

Teorema 3.3. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci f este lipschitziană pe orice segment $[a, b]$ inclus în interiorul lui I.*

Demonstraţie. Fie $[a, b]$ inclus în interiorul lui I şi $u, v \in [a, b]$ cu $u < v$. Notăm $M = \max\{|f'_d(a)|; |f'_s(b)|\}$ şi atunci avem:

$$-M \leq f'_d(a) \leq f'_d(u) \leq \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq f'_s(v) \leq f'_s(b) \leq M$$

şi deci $|f(u) - f(v)| \leq M|u - v|$, $\forall\, u, v \in [a, b]$.

Dăm în continuare câteva criterii de convexitate pentru funcţii derivabile.

Teorema 3.4. *O funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă (strict convexă) dacă şi numai dacă derivata sa este crescătoare (strict crescătoare).*

Demonstraţie. **Necesitatea**. Avem $f(t) \geq f(t_0) + m(t - t_0)$, unde $m \in [f'_s(t_0), f'_d(t_0)]$, şi din $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq m$ pentru $t > t_0$ şi $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq m$, deci derivata lui f este crescătoare, deoarece din teorema 1 avem $f'_s(t_1) \leq f'_s(t_2)$, $\forall\, t_1 < t_2$.
Suficienţa. Presupunem că ar exista o funcţie derivabilă cu derivata crescătoare şi care nu este convexă. Ar exista atunci $a, b, c \in I$ cu $a < b < c$ şi $r_b(a) > r_b(c)$, adică:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \Rightarrow \exists\, t_1 \in (a, b); t_2 \in (b, c)$$

cu $f'(t_1) > f'(t_2)$ cu $t_1 < t_2$, absurd deoarece f' este crescătoare. Deci presupunerea făcută este falsă.

Deducem imediat o condiţie pentru funcţii concave.

Teorema 3.5. *O funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ este concavă dacă şi numai dacă derivata sa este descrescătoare.*

Se face o demonstraţie analogă pentru funcţia "$-f$".

Ideea de a caracteriza funcţiile convexe cu derivatele de ordin unu sau doi este destul de avantajoasă, dar pentru funcţiile nederivabile nu se poate folosi. Dacă funcţia este nederivabilă sau derivabilă numai o singură dată, apelăm la criteriile anterioare.

Pentru funcţiile derivabile de două ori, avem:

Propoziţia 3.1. *Fie $f : i \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori pe I. Atunci f este convexă (concavă) dacă şi numai dacă $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pentru orice x din I.*

Demonstraţie. **Necesitatea**. Dacă funcţia este convexă pe I, atunci cum este derivabilă de două ori, avem $f'(x)$ crescătoare din rezultatul precedent. Deoarece $f'(x)$ este derivabilă, fiind şi crescătoare, rezultă că $(f'(x))' = f''(x) \geq 0$.
Suficienţa. Dacă $f''(x) \geq 0$ pe I, avem că $f'(x)$ este crescătoare, deci, conform cu teorema precedentă, f este convexă.
Sau avem o altă demonstraţie.

Fie $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Pentru orice $\alpha \in (x_1, x_2)$ aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[x_1, \alpha]$ şi $[\alpha_1, x_2]$, deducând existenţa a două puncte $\xi_1 \in (x_1, \alpha)$ şi $\xi_2 \in (\alpha_1, x_2)$, pentru care:

$$\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} = f'(\xi_1) \quad \text{şi} \quad \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha} = f'(\xi_2)$$

şi cum $\xi_1 < \xi_2$ deducem $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Înlocuind $\alpha = (1-t)x_1 + tx_2$, deducem:

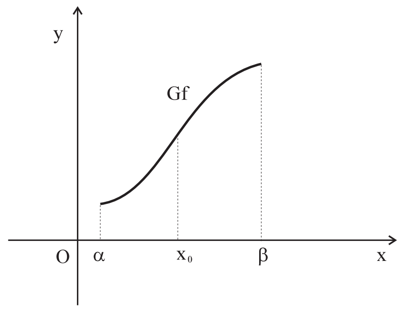
$$\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{(1-t)(x_2 - x_1)},$$

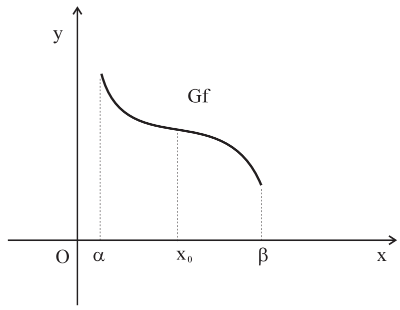
adică $f(\alpha) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

Pentru verificarea concavităţii facem un raţionament analog.

Faptul că derivata a doua este pozitivă sau negativă pe un interval, exprimă geometric faptul că, coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcţiei este crescător, respectiv descrescător. Punctul din graficul unei funcţii, în care o funcţie continuă îşi schimbă convexitatea, este un punct remarcabil şi este definit de:

Definiţia 3.1. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe I. Un punct $x_0 \in I$, distinct la capetele intervalului I, se numeşte punct de inflexiune pentru f, dacă există numere α, β din I, cu $\alpha < x_0 < \beta$, astfel încât f să fie convexă pe $(\alpha, x_0]$ şi concavă pe $[x_0, \beta)$ sau invers. Ilustrăm prin figurile alăturate câteva cazuri.





Vom da o condiţie suficientă pentru ca un punct să fie de inflexiune, însă avem nevoie de un rezultat legat de puncte de extrem dat de

Teorema 3.6. *Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in (a, b)$ un punct critic şi funcţia f derivabilă de două ori, atunci $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) iar x_0 este un punct de minim local (respectiv de maxim local) pentru funcţia f.*

Demonstraţie. $f''(x_0) > 0$, avem existenţa unei vecinătăţi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ în care $f'(x)$ este crescătoare.
Din $f'(x_0) = 0$, deci pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ avem $f'(x) \leq f'(x_0) = 0$ şi deci pe $(x_0 - \delta, x_0)$ f este descrescătoare. Analog pe $(x_0, x_0 + \delta)$ f este crescătoare, deci pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ avem $f(x_0) \leq f(x)$, rezultă că x_0 este punct de minim local.

Analog pentru punctul de maxim local. Cu acest rezultat, dăm o condiţie suficientă pentru puncte de inflexiune prin

Teorema 3.7. *Fie x_0 un punct din I, $f : I \to \mathbb{R}$, f de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0. Dacă există $\alpha, \beta \in V$ pentru care:*

i) $\alpha < x_0 < \beta$

ii) $f''(x_0) = 0$

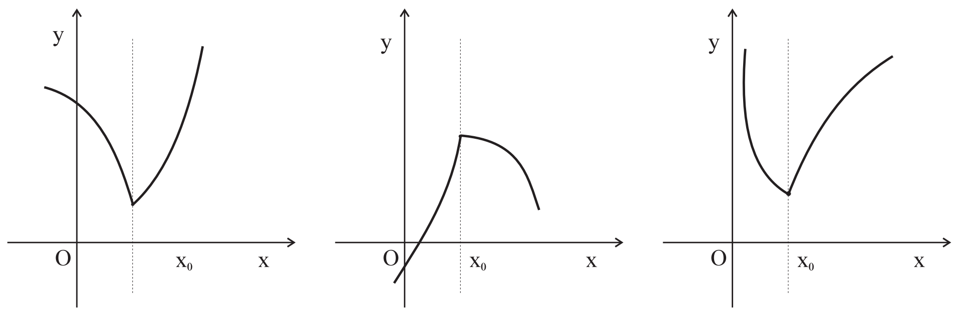
iii) $f''(x) < 0$ *pe* (α, x_0) *şi* $f''(x) > 0$ *pe* (x_0, β) *sau invers, atunci x_0 este punct de inflexiune.*

Demonstraţie. Din teorema precedentă, f este concavă pe $(\alpha, x_0]$ şi convexă pe $[x_0, \beta)$, deci este punct de inflexiune.
Trebuie accentuat faptul că numai condiţia $f''(x_0) = 0$ nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune. Dăm aici două exemple.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 6x + 4$, $f'(x) = 3x^2 - 6$, $f''(x) = 6x$ şi pentru $x \in (-\infty, 0]$, $f''(x) \leq 0$ iar pe $[0, \infty)$ $f''(x) \geq 0$, adică $x = 0$ este punct de inflexiune.

b) $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, dar $f''(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ nu este punct de inflexiune.

Observaţia 3.2. Trebuie remarcat că punctele de întoarcere sau cele unghiulare pot deveni puncte de inflexiune. Iată câteva exemple.



Observaţia 3.3. Noţiunile de convexitate şi concavitate sunt tratate în sens complementar la fizică, şi acest lucru la lentile.

Dacă în Teorema 3.2 am enunţat un rezultat care este de fapt şi reciproca teoremei lui Fermat, iată cum arată celelalte reciproce.

Teorema 3.8. (Reciproca teoremei lui Rolle). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi strict convexă. Atunci pentru oricare $c \in (a, b)$ cu $f'(x) = 0$, există $x_1, x_2 \in [a, b]$ cu $x_1 < x < x_2$, cu proprietatea $f(x_1) = f(x_2)$.*

Demonstraţie. f este strict convexă, deci f' este strict crescătoare, adică $f'(x) < f'(c) = 0$ pentru $x \in [a, c)$ şi $f'(x) > f'(c) = 0$ pentru orice $x \in (c, b]$. Deducem că punctul $x_0 = c$, este un punct de extrem, de minim absolut şi $f(x) > f(c)$, $\forall x \in [a, b] \backslash \{c\}$.
Putem avea:

i) $f(a) < f(b)$ şi considerând $g(x) = f(x) - f(a)$, avem:

$$g(c) \cdot g(b) = (f(c) - f(a))(f(b) - f(a)) < 0$$

şi deoarece g este continuă, deci cu proprietatea lui Darboux, există $x_2 \in (c, b)$ în care $g(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(a)$, luând $x_1 = a$ avem concluzia.

ii) $f(a) > f(b)$ şi considerând $g(x) = f(x) - f(b)$ avem:

$$g(c) \cdot g(a) = (f(c) - f(b))(f(a) - f(b)) < 0,$$

analog $(\exists)$ $x_2 \in (a, c)$ pentru care $g(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(b)$, alegem $x_1 = b$ şi deci am dedus concluzia.

iii) $f(a) = f(b)$ este evident.

Consecinţa 3.1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de două ori derivabilă şi $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci pentru orice $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$ există $x_1 < c < x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2)$.

Demonstraţie. $f''(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [a, b] \Rightarrow f''(x) > 0\; \forall\, x \in [a, b]$ sau $f''(x) < 0$ $\forall\, x \in [a, b]$.
Dacă $f''(x) > 0\;\; \forall\, x \in [a, b] \Rightarrow f'(x)$ este strict crescătoare şi funcţia este convexă, deci deducem rezultatul din Teorema 3.8. Pentru $f''(x) < 0$ avem condiţii analoge şi aceeaşi concluzie.

Observaţia 3.4. Condiţia de convexitate strictă este necesară, după cum rezultă şi din exemplul următor:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0) \\ x^4, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

este convexă (dar nu strict) şi $f'(0) = 0$, însă $f(x_1) \neq f(x_2)$, pentru orice $-1 \leq x_1 < 0$; $0 < x_2 \leq 1$.

Consecinţa 3.2. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi strict convexă. Atunci oricare ar fi $c \in (a, b)$, există $x_1, x_2 \in [a, b]$ cu $x_1 < c < x_2$ şi $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c)$.

Teorema 3.9. (Reciproca teoremei lui Lagrange). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi convexă. Atunci pentru orice $c \in (a, b)$, există $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ pentru care să avem:*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Demonstraţie. Fie $c \in [a, b]$ fixat şi considerăm funcţia

$$g(x) = f(x) - (f(c) + (x - c)f'(c)) .$$

Deoarece f este convexă, am dedus $f(x) \geq f(c) + (x - c)f'(c)$, $\forall\, x \in [a, b]$, adică $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$. Avem atunci asigurată existenţa lui $x_1 \neq x_2$ pentru care $g(x_1) = g(x_2)$, deoarece:

i) dacă $g(a) = g(b)$; $\quad x_1 = a$ şi $x_2 = b$.

ii) $g(a) < g(b)$ şi $g(c) = 0 \leq g(a) < g(b)$. Deoarece g are proprietatea lui Darboux, deducem existenţa lui $x_2 \in (c, b)$ cu $g(x_2) = g(a)$ şi deci $x_1 = a$.

iii) $g(a) > g(b)$, avem $g(c) = 0 \leq g(b) < g(a)$ şi există $x_2 \in (a, c)$ cu $g(x_2) = g(b)$ şi alegem $x_1 = b$.

Ţinând cont de $\left.\begin{array}{l} g(x_1) = f(x_1) - f(c) - (x_1 - c)f'(c) \\ g(x_2) = f(x_2) - f(c) - (x_2 - c)f'(c) \end{array}\right\}$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$.

Consecinţa 3.3. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu $f''(x) \geq 0$. Atunci pentru orice $c \in I$ (punct interior), există $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ astfel încât $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c)$.

Demonstraţia decurge din $f''(x) \geq 0$, deci f este convexă, şi din Teorema 3.9.

Capitolul 4

Convexitatea şi integrabilitatea

Vom preciza câteva rezultate, cunoscute ca teoreme sau propoziţii care leagă cele două noţiuni.

Propoziţia 4.1. (Inegalitatea lui Jensen). *Fie $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ o funcţie integrabilă şi $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă pe $[a,b]$. Avem*

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi \circ f)(x)dx.$$

Demonstraţie. Precizarea de continuitate era necesară doar pe capetele intervalului, deoarece în rest am dovedit-o înainte. Funcţia f este integrabilă, φ continuă, deci $\varphi \circ f$ este integrabilă şi avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\varphi \circ f)\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi \circ f)dx.$$

Din convexitatea lui φ deducem:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi \circ f)\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Trecând la limită şi ţinând cont că funcţia φ este continuă, vom deduce:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b (\varphi \circ f)\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

şi deci concluzia.

Consecinţa 4.1. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$, integrabilă, strict pozitivă. Atunci pentru oricare $a, b \in I$, cu $a < b$, avem:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right).$$

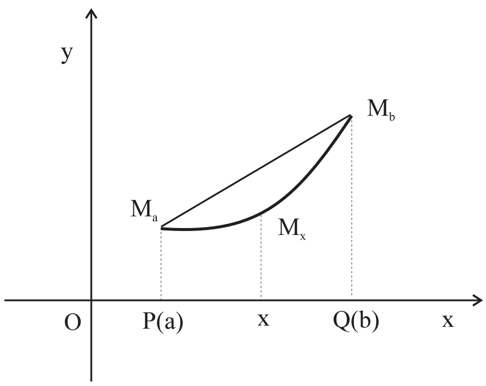
Se deduce uşor din concavitatea funcţiei logaritmice.

Propoziţia 4.2. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă şi convexă. Atunci $\forall\, a, b \in I$, $a < b$, avem inegalităţile:*

$$\min\{f(a), f(b)\} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Demonstraţie. Fixând $a, b \in I$ cu $a < b$, şi cum f este convexă pe $[a, b]$ deci integrabilă (continuă pe (a, b)), f este mărginită. Putem presupune $f(x) \ge 0$ $\forall\, x \in [a, b]$ (în caz contrar înlocuim funcţia f cu $g(x) = f(x) + \lambda$, λ ales convenabil).

Fie punctele $M_a = (a, f(a))$ şi $M_b = (b, f(b))$ iar $M_x = (x, f(x)$ unde $x \in [a, b]$. Din convexitatea funcţiei f deducem că M_x este un punct situat sub segmentul M_aM_b.



Deducem

$$\int_a^b f(x)dx \le \text{Aria}_{PQM_bM_a} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Pe de altă parte $\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f(a)$ (respectiv $\ge (b-a)f(b)$), deci are loc concluzia.

Observaţia 4.1. Dacă f este concavă, atunci avem:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

Toate inegalităţile sunt stricte, dacă convexitatea sau concavitatea este strictă.

Capitolul 5

Aplicaţii.

5.1 Enunţuri

Vom prezenta câteva probleme, la care dăm soluţii sau indicaţii de rezolvare.

1. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci pentru orice $a, b, c \in I$ avem:

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq$$
$$\geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{a+c}{2}\right)\right].$$

(Inegalitatea lui Tiberiu Popovici)

2. Pentru orice $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $f(t) \leq \dfrac{b-t}{b-a} f(a) + \dfrac{t-a}{b-a} f(b),\ \forall\, t \in (a,b), a < b$;

ii) $\forall\, a, b, c \in I$ cu $a < b < c$ avem $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$;

iii) $\forall\, a, b, c \in I$ cu $a < b < c$ avem $D_f = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$

3. Dacă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este convexă, atunci există:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}.$$

4. Dacă $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ este convexă şi derivabilă de două ori cu: $tf'(t) < f(t)$; $\forall\, t \geq 1$, atunci:

i) $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ este convexă;

ii) $2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq af(b)+bf(a);\ \forall\, a,b \geq 1.$

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este convexă, atunci pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $g(x)=f(ax+b)$, g este convexă.

6. Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este o funcţie convexă şi $a,b\in I$, atunci funcţia $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=f(ax+b(1-x))$ este convexă şi reciproc.

7. Dacă $x_k>0$; $k=\overline{1,n}$ cu $x_1x_2x_3\dots x_n=1$, atunci $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n$.

8. Fie $f:[0,1]\to[0,\infty)$ o funcţie integrabilă şi convexă astfel încât $\int\limits_0^1 f(x)dx=0$. Să se arate că $f(x)=0$, $\forall\, x\in(0,1)$.

9. Să se determine funcţiile $f:[0,4]\to[0,\infty)$ integrabile şi concave care satisfac relaţia $\int\limits_1^3 f(x)dx=\dfrac{3}{2}f(2)$.

10. Fie $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ şi $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}_+$, atunci avem inegalitatea:

$$\left(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}} \leq \frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

(Inegalitatea mediilor generalizată)

11. Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivariabilă. Atunci f este funcţie afină $\Leftrightarrow \exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha x+\beta$; $\forall\, x\in I$.

12. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie concavă cu $f(0)\geq 0$, atunci f este subaditivă.

13. Fie $f:R_+^*\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă şi subaditivă. Atunci funcţia $g(x)=\dfrac{1}{x}f(x)$, $x\in\mathbb{R}_+^*$ este monoton descrescătoare.

14. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă pentru care $f(a)\cdot f(b)<0$. Atunci ecuaţia $f(x)=0$ are o singură soluţie.

(Extindere pentru teorema lui Darboux)

15. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie concavă şi monoton crescătoare. Atunci oricare ar fi $x_1,x_2,x_3,x_4\in I$, care sunt în progresie aritmetică crescătoare, avem:

i) $f(x_1)+f(x_4)\leq f(x_2)+f(x_3)$

ii) $f(x_1)\cdot f(x_4)\leq f(x_2)\cdot f(x_3)$.

16. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi nenegativă. Atunci pentru orice $x_i \in I$; $i = \overline{1,n}$ cu $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ avem inegalitatea:

$$\begin{aligned} & x_1 f(x_n) + x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_{n-1}) \leq \\ & \leq x_n f(x_1) + x_1 f(x_2) + \cdots + x_{n-1} f(x_n). \end{aligned}$$

17. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Construiţi o funcţie convexă $f : I \to \mathbb{R}$ pentru care $f \circ f$ nu este convexă.

18. Fie $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie nenegativă şi de două ori derivabilă cu $f''(x) \leq 0$ şi $f'(x) \leq 0$. Atunci:

$$\sqrt[n]{f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)} \leq f(x_1 \cdot x_2 \dots x_n),$$

$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in I,\ x_1 + x_2 + \dots x_n = n.$

19. Fie $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi majorată. Atunci f este constantă.

20. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$; $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, atunci

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+b_i} \leq \frac{1}{1 + b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n}}$, dacă $b_i \leq 1$, $\forall\, i = \overline{1,n}$;

ii) $\displaystyle\sum_{1}^{n} \frac{a_i}{1+b_i} \geq \frac{1}{1 + b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n}}$; dacă $b_i \geq 1$, $\forall\, i = \overline{1,n}$.

21. Să se arate că:

i) $\displaystyle\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$; $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\displaystyle\ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y} \ln x + \frac{y}{x+y} \ln y$; $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

22. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ cu $\displaystyle\sum_{1}^{n} x_i = 1$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^p \geq \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}\,; \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

23. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0,1)$ cu $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, atunci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} \geq \frac{n^2}{n-1}\,.$$

24. Fie $x_i > 0$; $i = \overline{1,n}$ şi $\lambda_i \in [0,1]$; $i = \overline{1,n}$ cu $\sum\limits_{1}^{n} \lambda_i = 1$. Avem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

(Inegalitatea lui Hölder)

25. Dacă $a_1, a_2, a_3 > 0$, atunci $\dfrac{\sum\limits_{1}^{3} a_i^2}{\sum\limits_{1}^{3} a_i^3} \geq \dfrac{\sum\limits_{1}^{3} a_i^3}{\sum\limits_{i=1}^{3} a_i^4}$.

26. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $a + b + c = 1$, atunci $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 9$.

27. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $a + b + c = 1$, atunci $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq 27$.

28. Dacă funcţia $f : [a,b] \to [a,b]$ este convexă şi inversabilă, atunci:

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{-1}(x)dx\right) \leq \frac{a+b}{2} \leq f^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right).$$

29. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori şi $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{2}\big[f(a) + f(b)\big].$$

30. Să se arate că dacă $f : [1989, 1999] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi convexă, atunci:

$$\int_{1992}^{1996} f(x)dx \leq \int_{1989}^{1991} f(x)dx + \int_{1997}^{1999} f(x)dx.$$

31. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă cu $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in [0,1]$ şi $f(1) = 0$. Să se arate că:

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \int_{1/k}^1 f(x)dx; \text{ unde } k > 1.$$

32. Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ cu proprietatea că f este convexă iar g este concavă şi $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = g(1) > 0$. Să se arate că: $g(x) - f(x) \geq 1 - x$, $\forall\, x \in [0,1]$.

33. Să se arate că:

$$\frac{1}{x^2}\ln^2(\cos x) \leq \frac{1}{x}(\operatorname{tg} x - x),\ \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

34. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ nu sunt toate nule, să se arate că:

$$\frac{\left(\sqrt[n]{x_1} + \sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_n}\right)^n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \leq n^{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

35. Fie $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe $[0,1]$ cu $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in [0,1]$. Dacă $p \in \mathbb{N}$; $p \geq 2$, demonstraţi că:

$$\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx \leq \frac{p-1}{p^2} f(1) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \int_0^1 f(x)dx.$$

36. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie concavă şi derivabilă cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0$. Să se arate că $f(x) \leq ax + b$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

37. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f convexă, g concavă şi $f(a) = a$, $g(a) = b$, $f(b) = g(b)$. Să se demonstreze că:

$$g(x) - f(x) \geq b - x, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

(Generalizarea problemei 32)

38. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie strict convexă şi strict crescătoare. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $x_n = f(n)$ nu conţine nici o progresie aritmetică infinită.

39. Dacă $p_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{1}^{n} p_i = 1$, atunci $\forall\, x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ şi $r \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$, avem:

$$x_1^{p_1 x_1^r} \cdot x_2^{p_2 x_2^r} \ldots x_n^{p_n x_n^r} \geq \left(x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}\right)^{(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)^r}.$$

(Generalizarea inegalităţii lui Jensen)

40. Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este convexă ḑacă si numai dacă există o funcţie $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x' \in (a,b)$ şi $x'' \in [a,b]$ are loc relaţia:

$$f(x') + (x'' - x')f(x') \leq f(x'').$$

41. Se consideră funcţia $f : [e, e^2] \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Să se arate că:

$$e^2 \le \frac{1}{e-1} \int_e^{e^2} f(x)dx \le \frac{e^2}{4}(e+2).$$

42. Fie $a > 0$. Să se determine cea mai mare valoare $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care:

$$\left(\int_0^a f(t)dt \right)^2 \ge \lambda \int_0^a f^3(t)dt,$$

oricare ar fi funcţia $f : [0, a] \to [0, \infty)$, derivabilă de două ori cu $f(0) = 0$, $f''(x) \le 0$ şi $f'(0) = 1$, $\forall\, x \in [0, a]$.

43. Fie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n > 0$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ astfel încât $S = \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$. Să se arate că:

$$\frac{1}{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n} + \frac{1}{a_2x_1 + a_3x_2 + \cdots + a_nx_n} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{a_nx_1 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-1}x_n} \le \frac{1}{S}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right).$$

44. Demonstraţi că în orice triunghi ABC în care $A, B, C \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} + \sqrt{\operatorname{tg} C}}{\sqrt{\operatorname{ctg} A} + \sqrt{\operatorname{ctg} B} + \sqrt{\operatorname{ctg} C}} \ge \sqrt{3}.$$

45. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi derivabilă iar $\varepsilon > 0$. Demonstraţi că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $x_a \in \mathbb{R}$, pentru care $f(x_a + \varepsilon) - f(x_a) = \varepsilon f'(a)$.

46. Fie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, concavă şi monoton crescătoare. Arătaţi că pentru orice $r > 0$ şirul:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} f'(a + rk) - f(a + rn) \ (n \ge 1) \text{ este convergent.}$$

47. Fie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, concavă şi monoton crescătoare. Să se arate că $\forall\, r > 0$, seria $\sum_{n \ge 1} f'(a + rn)$ este convergentă dacă şi numai dacă:

$$\sup_{n \ge 1} |f(a + rn)| < \infty.$$

48. Fie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu $f'(x) \geq 0$ şi $f''(x) \leq 0$, $\forall\, x > a$. Să se arate că $\forall\, r > 0$ şirul

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} f'(a + rk) - f(a + rn)\ (n \geq 1) \text{ este convergent.}$$

49. Fie $k \geq 1$ fixat şi $x_n = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln kn$; $(n \geq 1)$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. În particular şirul lui Euler $x_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n$ $(n \geq 1)$ este convergent.

50. Să se arate că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, I interval şi convexă în sensul lui Jensen, nu are discontinuităţi de prima speţă în puncte interioare lui I.

51. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ convexă în sensul lui Jensen. Atunci pentru orice $r \in [0, 1] \cap Q$ avem $f(r) \leq \sup\{f(0), f(1)\}$.

52. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) f este concavă şi crescătoare;

ii) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice şiruri de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ respectiv $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pentru care

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$
$$a_1 \leq b_1,\ a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

are loc inegalitatea:

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n).$$

53. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in (0, \infty)$ care îndeplinesc condiţiile:

i) $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$;

ii) $a_1 \leq b_1$, $a_2 + a_1 \leq b_2 + b_1, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$,

atunci

1. $\sum_{1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{1}^{n} \frac{1}{b_i}$
2. $\prod_{1}^{n} a_i \leq \prod_{1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sum_{1}^{n} \sqrt{b_i}$

4. $\sum\limits_{1}^{n} \operatorname{arctg} a_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{arctg} b_i$

5. $\sum\limits_{1}^{n} \dfrac{a_i}{b_i} \geq n.$

54. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare.

a) Să se demonstreze că funcţia $F : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)dx \text{ este concavă}$$

b) Să se arate că pentru orice $m \in [0,1]$, există $a \in \mathbb{R}$ pentru care, oricare ar fi $x \in [0,1]$ avem:

$$\int\limits_{m}^{x} f(x)dt \leq a(x-m).$$

55. Fie $f, g : A(A \subset R) \to \mathbb{R}$ două funcţii, una concavă şi una convexă. Arătaţi că ecuaţia $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluţii.

56. Fie funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică condiţiile:

i) $h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $h''(x) < 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia h este constantă.

Rămâne concluzia adevărată dacă $A = (0, \infty)$, verificând i) şi ii) pe $(0, \infty)$?

57. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{c}{a}$ atunci:

$$\frac{\ln(1+a)}{\ln(1+b)} \geq \frac{\ln(1+c)}{\ln(1+a)}.$$

58. Să se afle partea întreagă a numărului real:

$$A = \pi \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\, dx.$$

59. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă cu $f''(x) \geq 0$. Să se arate că:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

60. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu $f''(x) \geq 0$.
Să se arate că:

$$\frac{(b-a)^2}{2} f'(a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx - (b-a)f(a) \leq \frac{(b-a)^2}{2} f'(b).$$

61. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ o funcţie convexă şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pentru care:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{1 + f(x_i)} \right) = 0.$$

Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)}{1 + f\left(\sum\limits_{1}^{n} x_i\right)} = 0.$$

62. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori cu $f''(x) \geq 0$. Arătaţi că dacă f este mărginită, atunci funcţia este constantă.

63. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie strict convexă. Dacă $a, b \in I$, $a < b$ şi $f'_d(a) \geq 0$, atunci f este strict crescătoare pe $[a, b]$.

64. Se consideră polinoamele $A, B, C \in \mathbb{R}[x]$ cu proprietatea că $A(x) \leq B(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi $C(x)$ este o combinaţie convexă a polinoamelor $A(x)$ şi $B(x)$. Arătaţi că dacă polinoamele $A(x)$ şi $B(x)$ au cel puţin câte un punct fix, atunci şi polinomul $C(x)$ are cel puţin un punct fix.

65. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi $u \in (a, b)$ un punct în care f este derivabilă. Arătaţi că există $x_1, x_2 \in [a, b]$ pentru care:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(u).$$

66. Fie f o funcţie, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe $(0, \infty)$ cu $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$. Considerăm numerele $a, b, c, d \in (0, \infty)$ cu $a < b < c < d$ şi $a + d = b + c$. Stabiliţi o relaţie între numerele $f(a) + f(d)$ şi $f(b) + f(c)$.

67. Fie $f : \mathbb{R} \to (-\infty, a)$, $a \geq 0$ o funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi care îndeplineşte condiţia:

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0$.

68. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale nenegative cu proprietatea

$$x_{n+2} \leq ax_{n+1} + bx_n, \text{ unde } a, b > 0 \text{ şi } a + b \leq 1.$$

Aătaţi că şirul este convergent (şirul se numeşte şir subconvex de ordin 2).

69. Încercând să definim un alt tip de funcţie, apropiat de cel al funcţie convexe, adică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + |x-y|$, vom arăta că o astfel de funcţie nu există.

5.2 Soluţii

1. Având simetrie în cele trei variabile, putem presupune $a \leq b \leq c$.
Vom deosebi cazurile:

i) $b \leq \dfrac{a+b+c}{3}$ ii) $b > \dfrac{a+b+c}{3}$.

În primul caz avem ordonările: $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \dfrac{a+c}{2} \leq c$ şi $\dfrac{a+b+c}{3} \leq \dfrac{b+c}{2} \leq c$ şi avem combinaţiile convexe $\dfrac{a+c}{2} = \alpha\dfrac{a+b+c}{3} + \beta c$, $\alpha + \beta = 1$, $\dfrac{b+c}{2} = \lambda\dfrac{a+b+c}{3} + \mu c$, $\lambda + \mu = 1$, de unde obţinem:

$$\frac{a+b+2c}{2} = (\lambda+\alpha)\frac{a+b+c}{3} + (2-\lambda-\alpha)c = (\lambda+\alpha)\frac{a+b-2c}{3} + 2c,$$

de unde

$$\frac{a+b-2c}{2} = (\lambda+\alpha)\frac{a+b-2c}{3} \Rightarrow \lambda + \alpha = \frac{3}{2}.$$

Din convexitatea lui f avem:

$$f\left(\frac{a+c}{2}\right) \leq \alpha f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (1-\alpha)f(c)$$
$$f\left(\frac{b+c}{2}\right) \leq \lambda f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (1-\lambda)f(c)$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b),$$

care prin adunare conduc la

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{a+c}{2}\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + \frac{1}{2}f(c) + \frac{3}{2}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

de unde prin înmulţire cu $\dfrac{2}{3}$ se obţine rezultatul cerut. Analog cazul ii).

2. i) $t = \dfrac{b-t}{b-a}a + \dfrac{t-a}{b-a}b \Rightarrow f(t) \leq \dfrac{b-t}{b-a}f(a) + \dfrac{t-a}{b-a}f(b)$, deoarece avem $\dfrac{b-t}{b-a} + \dfrac{t-a}{b-a} = 1$.

ii) $b = \alpha a + (1-\alpha)c$; $\alpha \in (0,1)$ şi cum $a - b = (1-\alpha)(a-c)$; $c - b = \alpha(a-c)$ şi deci $\dfrac{f(a)-f(b)}{(1-\alpha)(a-c)} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{\alpha(a-c)} \Leftrightarrow f(b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(c)$.

iii) $D_f = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b-a & f(b)-f(a) & 0 \\ c-b & f(c)-f(b) & 0 \end{vmatrix} =$
$= (b-a)[f(c)-f(b)] - (c-b)[f(b)-f(a)]$ şi

$$D_f \leq 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

3. Notăm $L = \inf\limits_{x>0} \dfrac{f(x)}{x}$, şi $L \in \mathbb{R}$. pentru orice $x \in (0, \infty)$, există un $n \in \mathbb{N}$ aşa încât $x = na + (x - na)$, de unde $a > 0$ şi deducem

$$L \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{nf(a) + f(x-na)}{x} \leq \frac{nf(a)}{x} + \frac{f(x-na)}{x}.$$

Deoarece f este convexă, ea este şi subaditivă.

Din definiţia marginii inferioare $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, a > 0$ cu proprietatea

$$L \leq \frac{f(a)}{a} \leq L + \varepsilon \Leftrightarrow La \leq f(a) \leq (L+\varepsilon)a$$

şi deducem

$$L \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{n}{x}(L+\varepsilon) + \frac{f(x-na)}{x},$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$. Analog pentru $L = -\infty$.

4. i) Se verifică condiţia de convexitate pentru funcţia g, deoarece este derivabilă de două ori, folosind $tf'(t) < f(t)$, $\forall\, t \geq 1$.

ii) $2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq 2 \cdot \dfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] = 1 \cdot f(a) + 1 \cdot f(b) \leq af(b) + bf(a)$; $\forall\, a, b \geq 1$ ţinând cont de $f(x) \geq 0$; $\forall\, x \geq 1$.

5. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $u, v > 0$ cu $u + v = 1$, atunci $g(ux+vy) = f(aux + avy + b) = f\big(u(ax+b) + v(ay+b)\big) \leq uf(ax+b) + v(ay+b) = ug(x) + vg(y)$.

6. Fie $x_1, x_2 \in [0,1]$ şi $u, v > 0$ cu $u + v = 1$. Atunci avem:

$$\begin{aligned}\varphi(ux_1 + vx_2) &= f\left[a(ux_1 + vx_2) + b(1 - ux_1 - vx_2)\right] = \\ &= f\left[u(ax_1 - bx_1 + b) + v(ax_2 - bx_2 + b)\right] \le \\ &\le uf\left(ax_1 + b(1 - x_1)\right) + vf\left(ax_2 + b(1 - x_2)\right) = \\ &= u\varphi(x_1) + v\varphi(x_2).\end{aligned}$$

Reciproc, dacă $a, b \in I$ şi $u, v > 0$, cu $u + v = 1$, atunci $f(ua + vb) = f\left(ua + (1-u)b\right) = \varphi(u) = \varphi(1 \cdot u + 0 \cdot v) \le u\varphi(1) + v\varphi(0) = uf(a) + vf(b)$, adică funcţia este convexă.

7. Considerând funcţia $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ care este concavă, chiar în sens Jensen (se demonstrează fără derivate), adică

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge \frac{1}{n}\left(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n\right) = \frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 = \ln 1$$

deci

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge 1.$$

8. Şirul $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$ este convergent la $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
Pe de altă parte, din inegalitatea lui Jensen, avem:

$$0 \le f\left(\frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}}{n}\right) \le a_n$$

şi deci $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{n+1}{2n}\right) = 0$.
Presupunem că ar exista α, pentru care $f(\alpha) > 0$ şi considerând $\alpha \in (0, 1/2)$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ pentru care $f\left(\frac{n_0+1}{2n_0}\right) < f(\alpha)$ avem $\frac{n_0+1}{2n_0} > \frac{1}{2} > \alpha$ şi f convexă, de unde $f(x) \ge f(\alpha) > 0$, $\forall\, x \in [0, \alpha]$. Dar $\int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^{1/2} f(x)dx \ge f(x)\frac{1}{2} > 0$, contradicţie cu $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

9. Deducem pentru orice $x \in [1, 2]$

$$f(x) = f\left(\left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot 0 + \frac{x}{2} \cdot 2\right) \ge \left(1 - \frac{x}{2}\right) f(0) + \frac{x}{2} f(2) \ge \frac{x}{2} f(2).$$

Analog pentru $x \in [2,3]$, $f(x) \geq \dfrac{a-x}{2} f(2)$, de unde $f(x) \geq 2f(2)$ şi

$$\int_1^3 f(x)dx \geq \int_1^3 2f(2) = 6f(2); \quad \int_1^2 f(x)dx \geq f(2) \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{3}{4}\, f(2)$$

$$\int_2^3 f(x)dx \geq \frac{1}{2} f(2) \int_2^3 (a-x)dx = \frac{3}{4}\, f(2)$$

pentru a determinat. Avem deci peste tot egalităţi obţinute din adunare, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} f(2); & x \in [1,2] \\ \dfrac{3-x}{2} f(2); & x \in [2,3] \end{cases}$. Se poate lua $a = 3$.

10. Inegalitatea dată este echivalentă cu:

$$\sum_1^n \frac{\lambda_i \ln a_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = \lambda_n} \leq \ln \left(\sum_1^n \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \right),$$

care se deduce din concavitatea funcţiei logaritmice.

11. Dacă funcţia $f(x) = ax + b$, $f''(x) = 0$ şi $f'(x) = a$, deci afină.
Dacă $f'(x) = c$, atunci fie $x_0 \in I$. Aplicând teorema lui Lagrange pe $[x, x_0]$ avem: $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi) = (x - x_0)c$, de unde deducem

$$f(x) = x \cdot c + f(x_0) - x_0\, c,$$

adică cerinţa.

12. Dacă $f(0) \neq 0$, putem înlocui pe f prin $f - f(0)$. Deoarece f este concavă, rezultă $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ este monoton descrescătoare.
Deci $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ cu $x < x + y$ şi $y < x + y$, deducem:

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(x+y)}{x+y}; \ \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y}$$
$$\Rightarrow f(x) + f(y) \geq f(x+y) \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) = f(x+y).$$

Pentru $x = 0$ sau $y = 0$ inegalitatea este evidentă.

13. Presupunem f convexă şi fie x, h pozitivi fixaţi şi deoarece

$$\lambda = \frac{x}{x+h} \in (0,1), \quad x + h = \lambda x + (1 - \lambda)(2x + h).$$

f convexă $\Rightarrow f(x+h) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(2x+h)$ şi cum f este subaditivă

$$f(2x+h) \leq f(x) + f(x+h) \Rightarrow f(x+h) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) + \\ + (1-\lambda) f(x+h) \Rightarrow \lambda f(x+h) \leq f(x),$$

adică $\dfrac{1}{x+h} f(x+h) \leq \dfrac{1}{x} f(x)$.

14. Presupunem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ iar $x_1, x_2 \in (a,b)$; $x_1 \neq x_2$ cu $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Dacă $x \in [a,b]$ şi fie $M_x(x_1 f(x))$. Pentru $c \in (x_1, x_2)$ atunci $c = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ cu $\lambda \in (0,1)$ şi din convexitate deducem:

$$f(c) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) = 0$$

şi $f(a) < 0$, adică $M(x_1, 0)$ este situat deasupra segmentului $\overline{M_a M_c}$, absurd, adică cel mult într-un punct se poate anula. Existenţa este asigurată de continuitatea lui f.

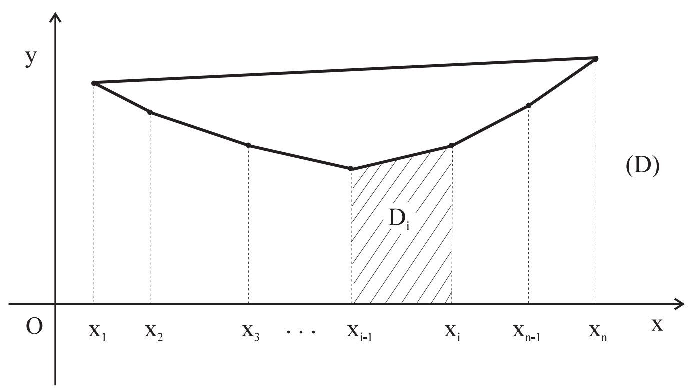
15. i) Fie x_1, x_2, x_3, x_4 progresia, deci $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \Rightarrow f(x_2) \geq \dfrac{1}{2}(f(x_1) + f(x_3))$ şi analog $f(x_3) \geq \dfrac{1}{2}(f(x_2) + f(x_1))$, care prin adunare conduc la cerinţă.

ii) $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq f(x_4)$ şi deci:

$$[f(x_4) - f(x_2)]\, f(x_1) \leq [f(x_4) - f(x_2)]\, f(x_2) \leq [f(x_3) - f(x_1)]\, f(x_2),$$

de unde $f(x_4) f(x_1) \leq f(x_3) f(x_2)$.

16. Funcţia fiind convexă, avem inegalitatea: $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \text{aria}\,(D_i) \leq \text{aria}\,(D)$.



Deoarece

aria $(D_i) = (x_i - x_{i-1})\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$; aria $(D) = \dfrac{f(x_1) + f(x_n)}{2}(x_n - x_1)$

avem:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \leq \frac{f(x_1)+f(x_n)}{2}(x_n - x_1)$$
$$\Rightarrow \sum_{2}^{n} x_i f(x_i) - \sum_{2}^{n} x_{i-1}f(x_{i-1}) + \sum_{i=2}^{n} x_i f(x_{i-1}) - \sum_{2}^{n} x_{i-1}f(x_i) \leq$$
$$\leq x_n f(x_1) - x_1 f(x_n) + x_n f(x_n) - x_1 f(x_1)$$
$$\Rightarrow x_1 f(x_n) + \sum_{2}^{n} x_i f(x_{i-1}) \leq x_n f(x_1) + \sum_{2}^{n} x_{i-1} f(x_i)$$

17. Pentru $I = \mathbb{R}$, considerăm funcţia $f(x) = |\,x| - 1$ pentru care $(f \circ f)(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 1 \\ -x, & x \in [0,1) \\ x, & x \in (-1,0] \\ -x-2, & x \in (-\infty,-1] \end{cases}$ care evident nu este convexă, deşi f este convexă.
Dacă f nu este convexă, alegem spre exemplu $I = [0,\pi]$ şi $f(x) = 1 - \sin x$ care este convexă. Avem:

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= 1 - \sin(1 - \sin x);\\
(f \circ f)'(x) &= -(1 - \sin x)' \cos(1 - \sin x) = \cos x \cos(1 - \sin x);\\
(f \circ f)''(x) &= \sin(1 - \sin x)\cos x - \sin x \cos(1 - \sin x);\\
(f \circ f)''(0) &= \sin 1 > 0;\\
(f \circ f)''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos 0 \sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0,
\end{aligned}$$

deci $(f \circ f)''(x)$ nu are acelaşi semn, deci nu poate fi convexă.

18. Din inegalitatea mediilor: $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} \leq \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = 1$, de unde $x_1x_2\dots x_n \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x_1x_2\dots x_n)$. Dar din concavitate avem:

$$f(1) = f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)\right) \geq$$
$$\geq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)}$$

adică cerinţa.

19. Lucrăm în ipoteza că funcţia este derivabilă, deci f' este monotonă crescătoare. Rezultă $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$. Funcţia fiind majorată, $\exists\, k \in \mathbb{R}$, cu $f(x) \leq k\ \forall x \in \mathbb{R}$. Să aplicăm regula lui L'Hospital pentru

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-k}{x} = \lim_{x\to-\infty} f'(x); \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-k}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x).$$

Deoarece $\dfrac{f(x)-k}{x} \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*$; $\dfrac{f(x)-k}{x} \leq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, deducem $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) \geq 0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) \leq 0$, dar f' este monoton descrescătoare, adică $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k$.

20. Fie $f(x) = (1+e^x)^{-1}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x(e^x-1)(1+e^x)^{-3}$, adică $f''(x) < 0, \forall\, x < 0$ şi $f''(x) > 0, \forall\, x > 0$.
Dacă $b_i \leq 1$ implică $x_i = \ln b_i \leq 0$, $i = \overline{1,n}$, $f\left(\sum\limits_1^n a_i x_i\right) \geq \sum\limits_1^n a_i f(x_i)$ şi deci avem $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{a_i}{1+b_i} \geq \dfrac{1}{1+b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n}}$. Analog pentru $b_i \geq 1$, $\forall\, i = \overline{1,n}$.

21. Fie $f(x) = x^n$; $x \in \mathbb{R}_+$ şi $n \in \mathbb{N}$.

i) $f''(x) = \begin{cases} n(n-1)x^{n-2}, & n \geq 2 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$ adică $f''(x) > 0, \forall\, x > 0$ şi avem

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right) = \frac{x^n+y^n}{2}, \ \forall\, x, y > 0.$$

ii) Fie $f(x) = x \ln x$; $n > 0$ cu $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall\, x > 0$ şi din convexitatea lui f avem:

$$\frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{2} \ln \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \ln \frac{y}{2},$$

adică cerinţa.

22. Fixăm $p \in \mathbb{N}$ şi considerăm $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^p$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f''(x) = p(p-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{2p}{x^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{p-1}; \ \forall\, x > 0,$$

de unde deducem $f''(x) > 0, \forall\, x > 0$.
f convexă $\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_1^n x_i\right) \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_1^n f(x_i)$, de unde

$$\left(\frac{1}{n}+n\right)^p = f(n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^p \Rightarrow \sum_1^n \left(x_i + \frac{1}{x_i}\right)^p \geq \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}.$$

23. Considerăm $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, care este convexă.
Deoarece $f''(x) > 0 \Rightarrow \sum\limits_1^n f(x_i) \geq n\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n}}\right) = n\dfrac{n}{n-1}$, adică cerinţa.

24. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ pentru care $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, adică funcţia este concavă, de unde deducem:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\Rightarrow\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln x_i$$

şi obţinem $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\geq\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}$. Egalitatea pentru $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$ conduce la inegalitatea mediilor.

25. Considerând funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, convexă, implică pentru

$$\lambda_1=\frac{a_1^2}{\sum\limits_1^3 a_i^2};\ \lambda_2=\frac{a_2^2}{\sum\limits_1^3 a_i^2};\ \lambda_3=\frac{a_3^2}{\sum\limits_1^3 a_i^2};$$

$f\left(\sum\limits_1^3\lambda_i x_i\right)\leq\sum\limits_1^3\lambda_i f(x_i)$ şi dacă alegem $x_1=\dfrac{\sum\limits_1^3 a_i^2}{2a_2a_3}$; $x_2=\dfrac{\sum\limits_1^3 a_i^2}{2a_1a_3}$; $x_3=\dfrac{\sum\limits_1^3 a_i^2}{2a_1a_2}$ se deduce:

$$\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)^2\leq\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right),$$

adică cerinţa.

26. $\dfrac{1}{a}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$; $\dfrac{1}{b}=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}$; $\dfrac{1}{c}=1+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$ care prin adunare conduc la:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 9.$$

Sau se aplică pentru $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ convexitatea.

27. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$. $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$; $f''(x)=\dfrac{6}{x^4}>0$, deci convexă.

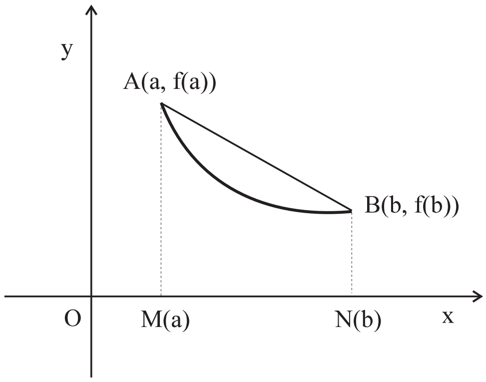
$$f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\Rightarrow a+b+c+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 28$$
$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 27.$$

28. f^{-1} este concavă, deci avem:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b (f^{-1}\circ f)(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{a+b}{2}.$$

$$f \text{ convexă} \Rightarrow \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{-1}(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(f^{-1}\circ f\big)(x)dx = \frac{a+b}{2}.$$

29. Aria domeniului mărginit de graficul funcţiei f şi axele Ox respectiv $a = x$ şi $b = x$ este $\int_a^b f(x)dx$.



Aria trapezului determinat de punctele $MNAB$ este $\frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big]$ şi inegalitatea este evidentă.

30. Considerăm şirurile de diviziuni echidistante de normă tinzând la 0 pentru intervalele $[1989, 1991]$, $[1992, 1994]$, $[1994, 1996]$ şi $[1997, 1999]$:

$$\Delta_1^n = (1989 = x_0^n < x_1^n < x_2^n < \cdots < x_n^n = 1991)\,;\; x_k^n = 1989 + \frac{2}{n}k;\; k = \overline{0,n}$$
$$\Delta_2^n = (1992 = y_0^n < y_1^n < y_2^n < \cdots < y_n^n = 1994)\,;\; y_k^n = 1992 + \frac{2}{n}k;\; k = \overline{0,n}$$
$$\Delta_3^n = (1994 = z_0^n < z_1^n < z_2^n < \cdots < z_n^n = 1996)\,;\; z_k^n = 1994 + \frac{2}{n}k;\; k = \overline{0,n}$$
$$\Delta_4^n = (1997 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_n^n = 1999)\,;\; t_k^n = 1997 + \frac{2}{n}k;\; k = \overline{0,n}$$

Avem $\|\Delta_i^n\| = \frac{2}{n}$; $\lim\limits_{n}\frac{2}{n} = 0$. Vom determina λ, $\mu \in (0,1)$ astfel ca
$y_k^n = \lambda x_k^n + (1-\lambda)t_k^n$ şi $z_k^n = \mu x_k^n + (1-\mu)t_k^n$; $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $k = \overline{0,n}$.
Având:

$$1992 + \frac{2k}{n} = \lambda\left(1989 + \frac{2k}{n}\right) + (1-\lambda)\left(1997 + \frac{2k}{n}\right) \Leftrightarrow 1992 = 1997 - 8\lambda$$

de unde $\lambda = \dfrac{5}{8}$ şi analog $\mu = \dfrac{3}{8}$.
Din convexitatea funcţiei deducem:

$$f\left(y_k^n\right) \le \frac{5}{8} f\left(x_k^n\right) + \frac{3}{8} f\left(t_k^n\right) \quad \text{şi} \quad f\left(z_k^n\right) \le \frac{3}{8} f\left(x_k^n\right) + \frac{5}{8} f\left(t_k^n\right)$$

rezultă

$$f(y_k^n) + f(z_k^n) \le f(x_k^n) + f(t_k^n);\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*;\ \forall\, k = \overline{1, n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(y_k^n)\frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(z_k^n)\frac{2}{n} \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^n)\frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(t_k^n)\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_2^n}(f, (y^n)) + \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_3^n}(f, (z^n)) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_1^n}(f, (x^n)) + \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_4^n}(f, (t^n))$$

de unde

$$\int_{1992}^{1994} f(x)dx + \int_{1994}^{1996} f(x)dx \le \int_{1989}^{1991} f(x)dx + \int_{1997}^{1999} f(x)dx,$$

adică cerinţa.

31. Este o aplicaţie a funcţiei convexe pe $[0, 1]$ cu $\alpha = \dfrac{k-1}{k}$; $1 - \alpha = \dfrac{1}{k}$.

32. Fie $A(0, 1)$; $B(1, k)$ unde $k = f(1) = g(1) > 0$. Graficul lui f este pe restricţia $[0, 1]$ sub coarda AB, deoarece f este convexă.
Dacă $h_1(x) = kx$; $x \in [0, 1]$ vem $f(x) \le h_1(x)$, $\forall\, x \in [0, 1]$.
Graficul funcţiei g este deasupra coardei AB, pe restricţia $[0, 1]$ şi deci $g(x) > h_2(x) = x(k-1) + 1$; $h_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, rezultă:

$$f(x) - g(x) \le kx - kx + x - 1 \Rightarrow g(x) - f(x) \ge 1 - x,\ \forall\, x \in [0, 1].$$

33. Aplicând inegalitatea lui jensen sub formă integrală pentru
$f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\qquad g(x) = x^2$, care sunt două funcţii continui, derivabile şi

$$g''(x) > 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))dx,\ \forall\, a, b \in I,\ a < b,$$

unde $f : I \to J$ şi $g : J \to \mathbb{R}$. Avem deci:

$$\frac{1}{x^2}\ln^2(\cos x) \le \frac{1}{x}(\operatorname{tg} x - x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{tg} y\, dy\right)^2 \le \frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{tg}^2 y\, dy.$$

34. Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\sqrt[n]{x_i} \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

dar considerând funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, pentru care $f''(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)x^{\frac{1}{n}-2}$ care este negativă. Cum f este concavă, aplicăm proprietatea de concavitate pentru $\alpha_i=\frac{1}{n}$; $i=\overline{1,n}$.
Se poate da şi o soluţie elementară la nivelul clasei a IX-a.

35. Funcţia f este integrabilă pe $[0,1]$, deci şi pe $\left[\frac{1}{p},1\right]$. Fie Δ o diviziune echidistantă a intervalului $\left[\frac{1}{p},1\right]$ de normă $\frac{p-1}{pn}$

$$\begin{aligned}\Delta: x_0=\frac{1}{p}<x_1=\frac{1}{p}+\frac{p-1}{pn}<x_2=\\ =\frac{1}{p}+\frac{2(p-1)}{pn}<\cdots<x_k=\frac{1}{p}+\frac{k(p-1)}{pn}<x_n=1.\end{aligned}$$

Atunci avem:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1}) =\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{p}+\frac{k(p-1)}{pn}\right)\frac{p-1}{pn} =\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{p-1}{pn}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}+\frac{k(p-1)}{pn}\right).\end{aligned}$$

Din faptul că f este convexă avem:

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{1}{p}+\frac{k(p-1)}{pn}\right)=f\left(\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}\,\frac{k}{n}\right)\le\frac{1}{p}f(1)+\frac{p-1}{p}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &\Rightarrow\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}\,\frac{k}{n}\right)\le n\,f\left(\frac{1}{p}\right)+\frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

şi

$$\frac{p-1}{pn}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}\,\frac{k}{n}\right)\le\frac{p-1}{p^2}f(1)+\left(\frac{p-1}{p}\right)^2\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şi deci
$$\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)dx \le \frac{p-1}{p^2}\, f(1) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 \int_{0}^{1} f(x)dx,$$
adică cerinţa.

36. f concavă. Dacă $\exists\ \alpha_1\ f(x) > a\alpha + b$, cum este convexă, se poate construi un şir $\alpha_n \to +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) - a\alpha_n - b > 0$.

37. Vezi problema 32.

38. Presupunând că şirul $a_n = f(n)$; $n \ge 1$ conţine un şir infinit de numere, care formează o progresie aritmetică de raţie nenulă.

Fie acest şir: $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$ cu $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_p < \ldots$

$2 \cdot a_{k_2} = a_{k_1} + a_{k_3} \Rightarrow 2f(k_2) = f(k_1) + f(k_3) \Rightarrow f(k_2) = \frac{1}{2}\big(f(k_1) + f(k_3)\big) > f\left(\frac{k_1+k_3}{2}\right)$, deoarece f este strict convexă şi aceasta conduce la: $k_2 > \frac{k_1+k_3}{2} \Rightarrow 2k_2 > k_1 + k_3$ şi analog relaţiile $2k_3 > k_2 + k_4$; $2k_4 > k_3 + k_5, \ldots, 2k_p > k_{p-1} + k_{p+1}, \ldots$.

Fie $k_2 = k_1 + p$; $p \in \mathbb{N} \Rightarrow 2k_1 + 2p > k_1 + k_3 \Rightarrow k_1 + 2p > k_3 \Rightarrow k_3 - k_1 - p < p \Rightarrow k_3 - k_2 < p$, deci şirul este urmat de termenul al treilea la diferenţă mai mică decât $k_2 - k_1 = p$. Deci după cel mult $p+1$ paşi se ajunge la: $1 + r$, r, m cu $m \le r - 1$, dar şirul este crescător.

39. Inegalitatea este echivalentă cu:
$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^r \ln x_i \ge (p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)^r \sum_{i=1}^{n} p_i \ln x_i$$
care se deduce din concavitatea funcţiei logaritmice şi a funcţiei $f(x) = x^r$ cu $r \ge 1$.
$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Deoarece $f''(x) = x^{r-2}(r(r-1)\ln x + 2r - 1) \ge 0$.

40. Necesitatea. Presupunem că f convexă şi definim funcţia $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ cu $g'(x) = f'(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$. Dacă $x' \in (a, b)$ şi $x'' \in [a, b]$, $x' \ne x''$.
Pentru f convexă avem asigurată existenţa derivatelor laterale ale lui f şi mai mult $f'_s(x_1) \le f'_d(x_1) \le f'_s(x_2) \le f'_d(x_2)$.
Dacă $x' < x'' \Rightarrow f((1-t)x' + tx'') \le (1-t)f(x') + tf(x'')$; $0 < t \le 1$, deci
$$f(x') + \frac{f(x' + t(x'' - x')) - f(x')}{t(x'' - x')}\,(x'' - x') \le f(x'')$$

şi trecând la limită

$$f(x') + (x'' - x')f'_s(x') \le f(x'')$$

şi analog pentru $x' > x''$.

Am demonstrat că pentru f convexă, tangenta la dreapta la graficul funcţiei f în orice punct din (a, b) este sub graficul lui f.

Suficienţa. Fie $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$. Deoarece pentru $t \in \{0, 1\}$ relaţia de convexitate este evidentă, putem presupune $t \in (0, 1)$ şi fie $x = tx_1 + (1-t)x_2 \in (a, b)$. Pentru $x' = x$, $x'' = x_1$ apoi $x' = x$, $x'' = x_2$ în relaţia $f(x') + (x'' - x')g(x') \le f(x'')$ conduce la:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) + (x_1 - x)g(x) \le f(x_1)/t \\ f(x) + (x_2 - x)g(x) \le f(x_2)/1 - t \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) + 0\, g(x) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

41. Fie funcţia $f : [e, e^2] \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Deducem $f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$, $\forall\, x \in [e, e^2]$. Avem inegalităţile:

$$(b-a)f(a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2},$$

pentru $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton crescătoare, integrabilă şi convexă.

Pentru $a = e$, $b = e^2 \Rightarrow e^2 \le \dfrac{1}{e-1}\displaystyle\int\limits_e^{e^2} f(x)dx \le \dfrac{e^2}{4}(e + 2)$.

42. $f''(x) \le 0 \Rightarrow f'(x)$ este descrescătoare $\Rightarrow f'(x) \le f'(0) = 1$.
Vom arăta că $\lambda = 1$ verifică inegalitatea şi apoi că aceasta este valoarea cea mai mare.

Am arătat că $\left(\displaystyle\int\limits_0^a f(t)dt\right)^2 \ge \displaystyle\int\limits_0^a f^3(t)dt$ pentru toate funcţiile $f : [0, a] \to [0, \infty)$ derivabile, în condiţiile date.

Considerăm funcţia $F : [0, a] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \left(\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt\right)^2 - \displaystyle\int\limits_0^x f^3(t)dt$ pentru care $F'(x) = 2\left(\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt\right)f(x) - f^3(x) = f(x)\left[2\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt - f^2(x)\right]$.

Cu notaţia $G(x) = 2\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt - f^2(x)$; $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ avem

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x) \cdot f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \ge 0$$

rezultă că G este crescătoare, şi cum $G(0) = 0 \Rightarrow G(x) \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 0$, rezultă că F este crescătoare, $F(0) = 0 \Rightarrow F(x) \geq 0$ şi deci $F(a) \geq 0$, adică ceea ce s-a cerut. Alegem $f(x) = x$, $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ pentru care $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x \leq 1$, $f''(x) = -\sin x \leq 0$. Scriind inegalitatea cerută pentru $f(x) = \sin x$ rezultă $\dfrac{a^2}{4} \geq \lambda \dfrac{a^4}{4}$, de unde $\lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda_{\max} = 1$.

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$, deci f este convexă. Deoarece $\dfrac{a_1}{S} + \dfrac{a_2}{S} + \cdots + \dfrac{a_n}{S} = 1$ şi $\alpha_i = \dfrac{a_i}{S}$, deducem:

$$f\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) = \frac{1}{\sum\limits_1^n \alpha_i x_i} = \frac{S}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n} \leq \sum_1^n \alpha_i \frac{1}{x_i},$$

şi analoagele care prin adunare conduc la cerinţă.

44. Inegalitatea simetrică în A, B, C, deci putem considera $A \leq B \leq C$ şi funcţiile $f, g : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $g(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

Deoarece f este convexă pe $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $B, C \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, avem:

$$\sqrt{\operatorname{tg} B} + \sqrt{\operatorname{tg} C} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}} = 2\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}},$$

iar cum g este concavă pe $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\sqrt{\operatorname{ctg} B} + \sqrt{\operatorname{ctg} C} \leq 2\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{B+C}{2}} = 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$$

$$S = \frac{\sum \sqrt{\operatorname{tg} A}}{\sum \sqrt{\operatorname{ctg} A}} \geq \frac{\sqrt{\operatorname{tg} A} + 2\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}}{\sqrt{\operatorname{ctg} A} + 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}} = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\frac{2t^2}{1-t^2} + 2}}{\sqrt{\frac{1-t^2}{2t^2} + 2}}, \ t = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

şi notând $n = \sqrt{\dfrac{2t^2}{1-t^2}} \Rightarrow t = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$ şi avem acum $S \geq \sqrt{n^2+2}\dfrac{n+2}{2n+1}$, dar $t \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow n \in (0, 1]$. deducem din $h : (0, 1] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \sqrt{x^2+2}\frac{x+2}{2x+1}; \ \ h'(x) = 2\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+2}}$$

cu $h'(x) \leq 0 \Rightarrow S \geq h(1) = \sqrt{3}$, adică cerinţa.

45. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$. Aplicând teorema lui Lagrange pe $[a-\varepsilon, a]$ şi pe $[a, a+\varepsilon]$ avem asigurată existenţa a două puncte $c \in (a-\varepsilon, a)$ şi $d \in (a, a+\varepsilon)$ cu proprietatea $f(a) - f(a-\varepsilon) = \varepsilon f'(c)$; $f(a+\varepsilon) - f(a) = \varepsilon f'(d)$, dar din f' crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $c < a < d$ rezultă $g(a-\varepsilon) = f'(c) < f'(a) \leq f'(d) = g(a)$. Deoarece g are proprietatea lui Darboux, $\exists\, x_a \in (a-\varepsilon, a)$ cu $g(x_a) = f'(a)$.

46. Din $f(x) \leq 0$, $\forall\, x \geq a$, considerăm şirul asociat lui $(-f)$ care coincide cu $(-x_n)_{n\geq 1}$. Deoarece $\operatorname{Im} f \ni 0$, $\exists\, n \geq 1$ cu $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \geq a + rn_0$. Schimbând deci f cu $-f$, sau considerând şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ putem presupune $f(x) \geq 0$.
f concavă şi derivabilă, rezultă f' este monoton descrescătoare. Cum f este monoton crescătoare, avem $f'(x) \geq 0$. Notăm $a_n = a + rn$; $n \geq 1$ şi $x_{n+1} - x_n = f'(a_{n+1}) - f(a_{n+1}) + f(a_n) = f'(a_{n+1}) - rf'(\xi_n) \leq (1-r)$.

Cum $(f'(a_n))_{n\geq 1}$ este şir monoton descrescător de numere nenegative şi $r > 0$, rezultă

$$(1-r)f'(a_{n+1}) \leq \begin{cases} 0, & r \geq 1 \\ (1-r)f'(a_1), & 0 < r < 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(a_{k+1}) - f(a_k) = rf'(\xi_k) \leq rf'(a_k),\ \forall\, k \geq 1$$

de unde

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_1^n f'(a_k) - f(a_n) \geq \frac{1}{r}\sum_1^n f(a_{k+1}) - f(a_k) - f(a_n) \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{r} - 1\right) f(a_n) - \frac{1}{r} f(a_1). \end{aligned}$$

Deoarece $(f(a_n))_{n\geq 1}$ este şir monoton crescător de numere pozitive:

$$\left(\frac{1}{r} - 1\right) f(a_n) \geq \begin{cases} 0, & 0 < r < 1 \\ \left(\dfrac{1}{r} - 1\right) b_1, & r > 1, \end{cases}$$

deci şirul este minorat, adică este convergent.

47. Şirul $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(a+rk) - f(a+rn)$ este convergent, deci seria $\sum f'(a+rn)$ este convergentă $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(a+rk)$ este convergent $\Leftrightarrow (f(a+rn))_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow (f(a+rn))_{n\geq 1}$ este mărginit (fiind monoton) $\Leftrightarrow \sup\limits_{n\geq 1}(a+rn) < +\infty$.

48. Din $f'(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ conduc la f concavă şi din $f'(x) \geq 0$ monoton crescătoare şi suntem la problema 46.

49. Funcţia $f(x) = \ln x$; $x > 0$ şi deducem $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$, de unde

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} f'(kj) - f(kn) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} - \ln kn,\ n \geq 1$$

este convergent.

50. Dacă $a \in I$ ar fi punct de discontinuitate de speţa I, ar rezulta că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ aşa încât $a - \delta < x < a$ ar implica $|f(x) - f(a-)| < \varepsilon$, unde $f(a-) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$, adică:

$$f(a-) - \varepsilon < f(x) < f(a-) + \varepsilon.$$

Pentru $x \in (a - \delta, a)$ atunci $\dfrac{x+a}{2} \in (a - \delta, a)$ şi:

$$f(a-) - \varepsilon < f\left(\frac{x+a}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(a)}{2} \leq \frac{f(a-) + f(a) + \varepsilon}{2},$$

adică $f(a-) \leq f(a) + 3\varepsilon$ şi cum ε este arbitrar, rezultă $f(a-) \leq f(a)$ şi analog $f(a+) \leq f(a)$. Cel puţin una din aceste inegalităţi este strictă, de exemplu ultima, însă atunci din definiţia lui $f(a+)$, rezultă că există un interval $(a - \delta, a + \delta)$ astfel încât pentru $y \in (0, \delta)$ avem $f(a - y) \leq f(a)$ şi $f(a) \geq f(a + y)$, de unde:

$$f(a) = f\left(\frac{(a-y) + (a+y)}{2}\right) \leq \frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} < f(a),$$

absurd, adică avem discontinuitate de prima speţă în punctul a din interiorul intervalului I.

51. Din ipoteza de convexitate Jensen, se demonstrează prin inducţie:

$$2^m f\left(\frac{1}{2^m}\sum_{1}^{2^m} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2^m} f(x_i);\ x_i \in [0,1]$$

şi pentru $n < 2^m$ rezultă, considerând punctele $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^m} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}$, inegalitatea

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(x_i).$$

Fie $r = \dfrac{m}{n}$ (ireductibilă) şi în inegalitatea de mai sus considerăm $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-m} = 0$ iar $x_{n-m+1} = x_{n-m+2} = \cdots = x_n = 1$, rezultă:

$$f(r) \le (1-r)f(0) + rf(1) \text{ de unde } f(r) \le \max\{f(0), f(1)\}.$$

52. Avem nevoie de următoarele rezultate: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concavă şi $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ cu $x \le y \le z \le t$ şi $x + t = y + t$ implică $f(x) + f(t) \le f(y) + f(z)$, rezultat cunoscut de noi din problema 15, deci nu îl mai reluăm.

Dovedim că i) $\Rightarrow$ ii) prin inducţie matematică.
Pentru $n = 1$, evidentă, şi dacă este adevărată pentru $n-1$, o dovedim pentru n, adică $a_n \le b_n \Rightarrow f(a_n) \le f(b_n)$. Presupunnd că $a_n > b_n$, atunci dacă în inegalităţile $a_1 \le b_1$, $a_1 + a_2 \le b_1 + b_2, \ldots, \sum_{n}^{n-1} a_i \le \sum_{1}^{n-1} b_i$ avem o egalitate $(\exists)\, k$, $1 \le k \le n-1$ cu $\sum_{1}^{k} a_i = \sum_{1}^{k} b_i$, avem $a_{k+1} \le b_{k+1}$, $a_{k+1} + a_{k+2} \le b_{k+1} + b_{k+2}, \ldots$, $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n \le b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_n$ şi din pasul inductiv, deoarece $n - k \le n - 1$, avem: $\sum_{1}^{n} f(a_{k+i}) \le \sum_{i=1}^{n} f(b_{k+i})$ şi la fel $\sum_{1}^{k} f(a_i) \le \sum_{1}^{k} f(b_i)$, care adunate conduc la ii).
Dacă toate sunt stricte, avem punând

$$\begin{aligned}\alpha = \min(&b_1 - a_1,\, b_2 + b_1 - a_1 - a_2, \ldots, b_1 + b_2 + \ldots \\ &+ b_{n-1} - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1}, a_n - b_n),\\ a'_1 = a_1 &+ \alpha; a'_2 = a_2, \ldots, a'_{n-1} = a_n, a'_n = a_n - \alpha\end{aligned}$$

şi dovedim că avem cel puţin o egalitate, de unde

$$f(a_1) + f(a_n) \le f(a_1 + \alpha) + f(a_n - \alpha)$$

care conduce la concluzie.

ii) $\Rightarrow$ i) Pentru $n = 1$ rezultă f crescătoare şi deducem

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $l = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, $L = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$, care există deoarece f este monotonă, mai mult $l, L \in \mathbb{R}$.
Din ii) rezultă $\forall\, \varepsilon > 0$ avem:

$$f(x_0 - 2\varepsilon) + f(x_0) \le 2f(x_0 - \varepsilon) \text{ şi } 2f(x_0 + \varepsilon) \le f(x_0) + f(x_0 + 2\varepsilon),$$

deci:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x_0-2\varepsilon)+f(x_0)\le \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2f(x_0-\varepsilon)\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2f(x_0+\varepsilon)\le f(x_0)+f(x_0+2\varepsilon)\end{array}\right\}\Rightarrow L\le f(x_0)\le l$$

şi cum f este crescătoare $l \le f(x_0) \le L \Rightarrow l = L = f(x_0)$, adică f este continuă, deducem f concavă.

53. Toate inegalităţile se obţin din problema precedentă, respectiv:

i) $f(x) = x;\ f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f''(x) = 0$

ii) $f(x) = \ln x;\ f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

iii) $f(x) = \sqrt{x}\,;\ f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f''(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-3/4}$

iv) $f(x) = \operatorname{arctg} x;\ f : (0,\infty) \to \mathbb{R};\ f''(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}.$

54. $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dx$ este concavă dacă şi numai dacă:

(*) $$F(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \ge \lambda F(x_2) + (1-\lambda)F(x_1),\ \forall\, \lambda \in [0,1]$$

şi $\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$.

Fie $x^* = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_2$, deci

$$F(x^*) = \int_0^{x^*} f(t)dt = \int_0^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x^*} f(t)dt$$

şi

$$F(x_2) = \int_0^{x_2} f(t)dt = \int_0^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x^*} f(t)dt + \int_{x^*}^{x_2} f(t)dt,$$

deci inegalitatea (*) este echivalentă cu:

$$\int_{x_1}^{x^*} f(t)dt \ge \lambda \int_{x_1}^{x^*} f(t)dt + \lambda \int_{x^*}^{x_2} f(t)dt \qquad \text{sau}$$

$$\lambda \int_{x^*}^{x_2} f(t)dt \le (1-\lambda) \int_{x_1}^{x^*} f(t)dt$$

dar $x_2 - x^* = x_2 - \lambda x_2 - (1-\lambda)x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) > 0$, deoarece $0 < x_1 < x^* < x_2 < 1$ şi $x^* - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) > 0$. Exceptând cazurile $\lambda \in \{0,1\}$, inegalităţile sunt stricte. Din monotonia lui f avem:

$$\lambda \int_{x^*}^{x_2} f(t)dt \le \lambda(x_2 - x^*)f(x^*) = \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)f(x^*) \le$$

$$\le (1-\lambda)f(x^*) \le (1-\lambda)\int_{x_1}^{x^*} f(t)dt,$$

adică cerinţa.

ii) Arătăm de fapt că pentru orice $m \in [0,1]$, $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$b(x-m) \le \int_m^x f(t)dt \le a(x-m),\ \forall\, x \in [0,1].$$

Deoarece f este descrescătoare pe $[0,1]$ putem scrie $f(1) \le f(x) \le f(0)$, $\forall\, x \in [0,1]$ şi tot din monotonia lui f deducem:

$$(x-m)f(1) \le \int_m^x f(t)dt \le (x-m)f(0),\ \forall\, x \ge m$$

$$(m-x)f(1) \le \int_x^m f(t)dt \le (m-x)f(0),\ \forall\, x \le m,$$

de unde rezultă valorile lui a şi b.

55. Dacă $\begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ f(b) = g(b) \\ f(c) = g(c) \end{array}$ cu $a < b < c$ rezultă

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left[(1-\lambda)a + \lambda c\right] \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(c) = \\ &= (1-\lambda)g(a) + \lambda g(c) \le g\left[(1-\lambda)a + \lambda c\right] = g(b), \end{aligned}$$

deci avem egalităţi peste tot, dacă însă sunt strict convexe şi concave proprietatea nu are loc. Dacă însă sunt strict convexe şi concave avem o contradiţie.

56. Din $f''(x) \le 0$, deducem f' monoton descrescătoare şi deci $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ notate cu α respectiv β şi avem:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \alpha\,; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta.$$

Cum $f(x) \leq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} \leq 0$, dacă $x \in \mathbb{R}_-^*$ şi $\dfrac{f(x)}{x} \geq 0$ dacă $x \in \mathbb{R}_+^*$ şi deci $\alpha \leq 0$ respectiv $\beta \geq 0$, adică $\alpha = \beta = 0$.
Deci $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, f' monotonă $\Rightarrow f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi deci $f(x) = \text{ct}$.
Pentru $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ concluzia este falsă, de exemplu $h(x) = \sqrt{x}$.

57. Avem de arătat că $\sqrt{bc} \leq a \Rightarrow \ln(1+b)\ln(1+c) \leq [\ln(1+a)]^2$ şi deducem:

$$\sqrt{bc} \leq a \Rightarrow 1 + \sqrt{bc} \leq 1 + a \Rightarrow \ln\left(1 + \sqrt{bc}\right) \leq \ln(1+a)$$
$$\Rightarrow \left(\ln\left(1+\sqrt{bc}\right)\right)^2 \leq (\ln(1+a))^2,$$

deci avem de dovedit că $\ln(1+b)\ln(1+c) \leq \left(\ln\left(1+\sqrt{bc}\right)\right)^2$ sau $\ln(\ln(1+b)) + \ln(\ln(1+c)) \leq 2\ln\left(\ln\left(1+\sqrt{bc}\right)\right)$.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $b = e^{x_1}$, $c = e^{x_2}$ şi relaţia precedentă revine la:

$$\ln(\ln(1+e^{x_1})) + \ln(\ln(1+e^{x_2})) \leq 2\ln\left(\ln\left(1+e^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)\right).$$

Considerând funcţia $f(x) = \ln(\ln(1+e^x))$; $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, avem:

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)\ln(1+e^x)}; \quad f''(x) = \frac{e^x\left[\ln(1+e^x) - e^x\right]}{(1+e^x)^2\left[\ln(1+e^x)\right]^2} < 0,$$

deoarece $\ln(1+t) < t$, $\forall\, t > 0$, deci concavă, adică are loc cerinţa.

58. Fie $f : \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$ şi f este crescătoare şi convexă.

$f'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x}$ şi din $g(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$ conduc la
$g'(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$, $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, adică f este crescătoare.

Pe de altă parte $f''(x) = \dfrac{2x - 2\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2\operatorname{arctg}^3 x} \geq 0$, adică f este convexă. Deci f este continuă, convexă şi crescătoare. Am arătat că:

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

de unde deducem pentru $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 1$ că

$$2\left(\sqrt{3}-1\right) < \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\,dx < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

şi deducem: $\left[\pi \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} dx\right] = 1.$

59. Definim $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int\limits_a^t f(x)dt - (t-a)f\left(\frac{a+t}{2}\right)$ pentru care avem:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f(t) - f\left(\frac{a+t}{2}\right) - \left(\frac{t-a}{2}\right) f'\left(\frac{a+t}{2}\right) = \\ &= \frac{t-a}{2}\left[f'(c_t) - f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right];\ c_t \in \left(\frac{t+a}{2}, t\right);\ t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Aplicând $f'(x)$ crescătoare, rezultă $F'(t) \geq 0 \Rightarrow F(b) \geq F(a) \geq 0$.
Pentru cealălaltă inegalitate considerăm:

$$G : [a, b] \to \mathbb{R};\ G(t) = (t-a)\frac{f(a) + f(t)}{2} - \int\limits_a^t f(x)dx$$

şi deducem

$$G'(t) = \frac{(t-a)f'(t) + f(a) - f(t)}{2} \Rightarrow G''(t) = \frac{t-a}{2}\ f''(t) \geq 0$$

şi G' (crescătoare) din $G'(a) = 0 \Rightarrow G(b) \geq G(a) = 0$.

60. Funcţia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int\limits_a^t f(x)dx - (t-a)f(a) - \frac{(t-a)^2}{2} f'(a)$.
Avem: $F'(t) = f(t) - f(a) - (t-a)f'(a)$; $F''(t) = f'(t) - f'(a) \geq 0$, deoarece f' este crescătoare rezultă F' este crescătoare cu $F'(a) = 0$.
Deducem $F(b) \geq F(a) = 0$.

Pentru inegalitatea cealaltă, considerăm funcţia:

$$G : [a, b] \to \mathbb{R},\ G(t) = \frac{(b-t)^2}{2} f'(b) + (b-t)f(t) - \int\limits_t^b f(x)dt$$

şi din $G'(t) = (b-t)\left[f'(t) - f'(b)\right] \leq 0 \Rightarrow G$ descrescătoare, adică $G(a) \geq G(b) = 0$.

61. Fie funcţia f, cu $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, atunci şi funcţia $g(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)}$, pentru care $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \Leftrightarrow \frac{f(x+y)}{1 + f(x+y)} \leq \frac{f(x)}{1 + f(x)} + \frac{f(y)}{1 + f(y)} \Leftrightarrow$

$f(x+y) \le f(x)+f(y)+2f(x)f(y)+f(x)f(y)f(x+y)$ care este evidentă. Avem atunci:

$$0 \le g\left(\sum_1^n x_i\right) \le \sum_1^n g(x_i) = \sum_1^n \frac{f(x_i)}{1+f(x_i)},\ g\left(\sum_1^n x_i\right) = \frac{f\left(\sum_1^n x_i\right)}{1+f\left(\sum_1^n x_i\right)}$$

deci $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f\left(\sum_1^n x_i\right)}{1+f\left(\sum_1^n x_i\right)} = 0.$

62. Din $f''(x) > 0$ deducem f' strict crescătoare. Deoarece f este mărginită superior, $f(x) \le a$, $a \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = f(x) - a$ şi $h(x) = x$; $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Avem $g'(x) = f'(x) \Rightarrow g'$ este strict crescătoare, deci $(\exists)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} |h(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |h(x)| = +\infty$. Aplicăm regula lui L'Hospital şi deducem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} g'(x); \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to-\infty} g'(x).$$

Pentru $x > 0 \Rightarrow \dfrac{g(x)}{h(x)} \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} g'(x) \le 0$, deci $g'(x)$ este crescătoare şi deducem $g'(x) \le 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$.

Pentru $x < 0$, $\dfrac{g(x)}{h(x)} \ge 0$ şi deci $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) \ge 0 \Rightarrow g'(x) \ge 0$ pentru orice $x < 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g$ constantă, adică f constantă.

Ipoteza la mărginire este esenţială, după cum rezultă din $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.

63. Funcţiile convexe, sunt continue pe interiorul intervalului şi admit derivate laterale monoton crescătoare în punctele interioare lui I.
Dacă $a < b \Rightarrow f'_d(a) \ge 0 \Rightarrow f'_d(x) \ge f'_d(a) \ge 0$, $\forall\, x > a$ şi x interiorul lui I, adică f monoton crescătoare pe $(a, \infty) \cap I$.

Fie $x, y \in I$, $x < y$ fixaţi şi să presupunem că $f(x) = f(y)$, adică fiind monotonă pe $[x, y]$ este constantă. Însă $f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, $\forall\, \lambda \in [0, 1]$, adică nu ar fi strict convexă. Nu poate avea loc $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$, deci f este strict crescătoare pe $I_a \cap [a, b]$.

64. Vom arăta că $A(x) \le C(x) \le B(x)$, care este echivalentă cu

$$A(x) \le \lambda A(x) + (1-\lambda)B(x) \le B(x) \Leftrightarrow (1-\lambda)A(x) \le (1-\lambda)B(x)$$

şi $\lambda A(x) \leq \lambda B(x)$ care sunt evidente.
Deducem $A(x) - x \leq C(x) - x \leq B(x) - x \Rightarrow$

$$A(x_1) - x_1 \leq C(x_1) - x_1 \leq B(x_1) - x_1$$
$$A(x_2) - x_2 \leq C(x_2) - x_2 \leq B(x_2) - x_2$$

şi dacă $f(x) = C(x) - x$ care este continuă, dar $f(x_1) \geq 0$ şi $f(x_2) \leq 0$, care implică proprietatea lui Darboux, existenţa unui punct $c \in (x_1, x_2)$ pentru care $C(c) = c$.

65. Considerăm funcţia $g(x) = f(x) - (f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi)$; $x \in [a, b]$ şi deoarece f este convexă, deci continuă pe (a, b) şi în orice punct unde este derivabilă, tangenta la grafic este sub grafic, $f(x) \geq g(x)$, adică $f(x) \geq f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi)$, de unde $g(x) \geq 0$.

Dacă $g(a) = g(b)$, $\exists\, x_1 = a$, $x_2 = b$, $g(x_1) = g(x_2)$.

Dacă $g(a) < g(b)$, cum f este continuă şi $g(x) \geq 0$, $g(\xi) = 0$, deducem $g(\xi) < g(a) < g(b)$, deci $\exists\, x_2 \in (\xi, b)$ cu $g(x_2) = g(a)$ şi avem

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) - (f(\xi) + (x_1 - \xi))f'(\xi) =$$
$$f(x_2) - (f(\xi) + (x_2 - \xi))f'(\xi) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\xi).$$

66. Aplicând teorema lui Lagrange pe $[a, b]$ şi $[c, d]$ avem:

$$\begin{array}{l} f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (a, b) \\ f(c) - f(d) = (c - d)f'(\xi_2), \quad \xi_2 \in (a, b) \end{array} \; b < c \Rightarrow \xi_1 < \xi_2$$

şi din $f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ strict crescătoare, rezultă $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$.
Avem $f(b) - f(a) < f(d) - f(c)$, adică $f(b) + f(c) < f(a) + f(d)$.

67. Considerând funcţia $g(x) = e^x f(x)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care este derivabilă de două ori şi $g''(x) = e^x\,(f(x) + 2f'(x) + f''(x)) \geq 0$ rezultă g convexă şi deoarece este mărginită superior, deducem că g este constantă $\Rightarrow g''(x)$, adică $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0$.

68. Fie şirul $y_n = \max\{xn_1, x_{n+1}\}$. Din $x_{n+2} \leq ax_{n+1} + b_n \Rightarrow x_{n+2} \leq ay_n + by_n = y_n(a + b) \leq y_n$, deducem $y_{n+1} \leq y_n$. Deci $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi $y_n \geq 0$, deducem că şirul este convergent şi fie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $y_n < l + a\varepsilon$; $\forall\, n \geq n_\varepsilon$. Dacă $n \geq 1 + n_\varepsilon$ atunci $x_{n-1} \leq y_{n-1} < l + a_\varepsilon$. Presupunând $x_n < l - \varepsilon$ rezultă

$$x_{n+1} \leq ax_n + bx_{n-1} < a(l - \varepsilon) + b(l + a\varepsilon) = (a + b)l + a(b - 1)\varepsilon < l,$$

rezulă $y_n < l$, contradicţie cu y_n descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$, deci pentru orice $n \geq 1 + n_\varepsilon$ avem $l - \varepsilon < x_n < y_n < l + a\varepsilon < l + \varepsilon$, de unde $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon + 1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.
Pentru $a + b < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n} x_n = 0$. Notând $l = \lim\limits_{n} x_n \Rightarrow l \geq 0$ şi pe de altă parte $l \leq (a + b)l$, de unde $l = 0$.

69. Fixăm $n \geq 1$. Pentru fiecare întreg i definim $\Delta_i = f\left(\dfrac{i+1}{n}\right) - f\left(\dfrac{i}{n}\right)$.
Luând $x = \dfrac{i+2}{n}$; $y = \dfrac{i}{n}$ şi înlocuind în relaţia dată, avem:

$$f\left(\frac{i+2}{2}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{4}{n},$$

de unde prin însumare pentru n valori consecutive obţinem $(i = \overline{0, n-1})$.

$$f(2) - f(1) \geq f(1) - f(0) + 4n.$$

Această inegalitate nu poate avea loc însă pentru orice n, deci nu există astfel de funcţii.

Bibliografie

[1] Buşneag, D., Maftei, I., *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983

[2] Colecţia *Gazeta Matematică*, seria A, seria B

[3] Colecţia *R.M.T*, Editura Bârchi

[4] Manual, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991

[5] Manual, *Analiză matematică*, Editura Curtea Veche, Bucureşti, 2002

[6] Megan, M., *Bazele analizei matematice*, Editura Eurobit, 1997

[7] Nicula, V., *Analiză matematică*, **II**

[8] Niculescu, C. P., *Convex Functions*, Lars-Erik Persson, Editura Universitatea Craiova, 2003

[9] Sireţchi, Gh., *Calcul diferenţial şi integral*, **I, II**, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985